Eberhard Karls
Universität
Tübingen

Fakultät für Informations- und Kognitionswissenschaften
Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik

Vorkurs Mathematik

Barbara Rakitsch und Thomas Nestmeyer

Vorwort

Dieses Skript ist für den Vorbereitungskurs Mathematik des WSI. Es soll sowohl eine Wiederholung von Schulwissen sein, als auch einen ersten Eindruck der Mathematik im Studium und insbesondere deren Notation vermitteln.

Wer Fragen hat oder Fehler findet wird ausdrücklich gebeten, eine Mail an Thomas Nestmeyer (T.Nestmeyer@arcor.de) zu schreiben.

Als Quelle diente hauptsächlich das Buch „Mathematik für Informatik und BioInformatik“ von Wolff, Hauck und Küchlin.

Viel Spaß im Studium!

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

Da Variablen für ähnliche Zwecke zur Wiedererkennung meist ähnlich benannt werden, ist das lateinische Alphabet oft schnell aufgebraucht. Man bedient sich daher in der Mathematik oft des griechischen Alphabets, um weitere Variablen zu erhalten. Damit man nicht von „dem Zeichen da“ reden muss, ist hier eine Liste der griechischen Buchstaben:

Großbuchstabe	Kleinbuchstabe	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
E	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

1 Aussagenlogik

1.1 Beispiele von Aussagen

1. Alle Professoren sind Menschen.
2. Alle Menschen sind Professoren.
3. Wenn Weihnachten und Ostern auf einen Tag fällt, dann bekommt jeder Teilnehmer des Vorkurses ein Mensaessen vom Tutor geschenkt.
4. Es gibt Außerirdische.

Wir erkennen, dass Aussage 1 immer wahr ist, während Aussage 2 nicht wahr ist, so lange es Menschen gibt, die keine Professoren sind.
Die dritte Aussage besteht aus zwei Teilaussagen: „Weihnachten und Ostern fallen auf einen Tag“ und „Jeder Teilnehmer des Vorkurses bekommt ein Mensaessen vom Tutor geschenkt“. Vorausgesetzt Weihnachten und Ostern fallen auf einen Tag, dann muss der Tutor die Mensaessen ausgeben, damit die Aussage wahr ist. Da das jedoch nicht passiert, kann der Tutor machen was er will und die Gesamtaussage ist wahr.
Der Wahrheitswert der vierten Aussage ist (wenigstens im Moment) nicht zu beantworten, da niemand weiß, ob Außerirdische existieren.

1.2 Definition

Wir sprechen von einer Aussage im mathematischen Sinne, wenn diese einen eindeutigen Wahrheitswert annimmt. Dieser Wahrheitswert kann beschrieben werden durch {wahr, falsch}, {true, false} oder {1, 0}. Wir werden im Folgenden stets die Bezeichnungen 0 für „Aussage nicht erfüllt “ und 1 für „Aussage erfüllt“ verwenden.

1.3 Verknüpfungen

Seien A und B Aussagen.

1. Verneinung / Negation: $\neg A$ (gesprochen: „nicht A“)

A	$\neg A$
0	1
1	0

2. Und / Konjunktion: $A \wedge B$ (gesprochen: „A und B“)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Oder / Disjunktion: $A \vee B$ (gesprochen: „A oder B“)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Wichtig ist, dass die Oder-Verknüpfung auch den „Und-Fall“ beinhaltet: $A \vee B$ ist wahr, wenn die Aussage A oder die Aussage B wahr ist, aber auch wenn beide Aussagen wahr sind.

Wenn wir fordern wollen, dass wirklich nur *eine* der beiden Aussagen wahr ist, damit die Gesamtaussage wahr ist, verwenden wir das exklusive Oder.

4. Exklusives Oder / XOR: $(A \oplus B)$ (gesprochen: „Entweder A oder B “)

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beispiel: Entweder wir fahren mit dem Bus, oder wir fahren mit dem Rad.

5. Folgerung / Implikation: $A \Rightarrow B$ (gesprochen: „Wenn A, dann B“, oder „Aus A folgt B“)

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \Rightarrow B$ ist also wahr, wenn die Aussage A und die Aussage B wahr sind oder wenn die Aussage A falsch ist.

Beispiel: Aussage 3 von oben.

6. Äquivalenz: $A \iff B$ (gesprochen: „A genau dann, wenn B“)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel: Eine ganze Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Wenn man die Äquivalenz verneint (Antivalenz genannt), ergibt sich die gleiche Wahrheitstafel wie die bei XOR. Man sagt dann, dass $\neg(A \Leftrightarrow B)$ und $A \oplus B$ *logisch äquivalent* sind. Den Begriff der „logischen Äquivalenz“ muss man aber von der Aussagenverknüpfung „Äquivalenz“ unterscheiden.

1.4 Beispiele für logische Äquivalenzen

1.4.1 Beweis der logischen Äquivalenz von $\mathbf{A \Rightarrow B}$ und $\mathbf{\neg A \vee B}$

Dies bestimmen wir, indem wir die Wahrheitstafeln der beiden Aussagen aufstellen und miteinander vergleichen.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Da die beiden Spalten $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ die gleichen Einträge haben, sind die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ logisch äquivalent.

1.4.2 Genau dann, wenn

Ist $A \iff B$ logisch äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$?

A	B	$A \iff B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

1.4.3 Assoziativgesetz

Ist $(A \vee B) \vee C$ logisch äquivalent zu $A \vee (B \vee C)$?

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$(B \vee C)$	$A \vee (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Analog zeigt man auch das Assoziativgesetz für das logische „Und“: $(A \wedge B) \wedge C$ und $A \wedge (B \wedge C)$ sind logisch äquivalent.

1.5 Übungen

1.5.1 DeMorgan'sche Regeln

Ist $\neg(A \vee B)$ logisch äquivalent zu $\neg A \wedge \neg B$?

1.5.2 Distributivgesetze

Ist $A \wedge (B \vee C)$ logisch äquivalent zu $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$?

2 Mengen

2.1 Definition (Georg Cantor, 1895)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

2.2 Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{7, 8, 9, 10, \text{Bube, Dame, König, Ass}\}$
- $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega\}$ (griechisches Alphabet)
- {Mercedes, BMW, Porsche, Audi, VW}
- {5, a, A, Haus, Zahl}
- $\emptyset := \{\}$ Leere Menge

2.3 Schreibweise

- $M := \{a, b, c, ...\}$
  gesprochen: „M wird definiert als die Menge aus den Elementen $a, b, c, \ldots$“
- $a \in M$
  gesprochen: „a ist ein Element von M“ oder kurz „a Element M“
- $1 \notin M$
  gesprochen: „1 ist nicht Element von M“ oder „1 ist kein Element von M“
- $\{x \in M : x \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$, oft auch $\{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$
  gesprochen: „Die Menge aller x aus M, für die gilt: x hat die Eigenschaft …“

2.4 Zahlbereiche

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen (ohne 0)	(handschriftlich meist $\mathrm{I\!N}$ statt $\mathbb{N}$)
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen mit 0	
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ganze Zahlen	
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$	rationale Zahlen	
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positive reelle Zahlen. Analog für $\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$.	
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen	

2.5 Quantoren

- $\forall x \in M$ (Allquantor oder Universalquantor)
  gesprochen: „Für alle $x \in M$“

  Beispiel: $\forall x \in \{2, 3, 5\} : x \leq 5$

- $\exists x \in M$ (Existenzquantor)
  gesprochen: „Es existiert ein $x \in M$“
  Beispiel: $\exists x \in \{3, 5, 7\} : x \leq 5$
- Vorsicht: $\exists$ schließt nicht aus, dass auch $\forall$ gelten kann!
  Beispiel: $\exists x \in \{2, 3, 5, 7\} : x \leq 10$
- Will man schreiben „Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$“, so schreibt man $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ oder noch kürzer $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}$ (das heißt also nicht, dass das für alle Nullen gilt).
- Die Quantoren können auch hintereinander benutzt werden, wobei die Reihenfolge wichtig ist!

  Beispiele: $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$ (ist erfüllt mit $y = \frac{1}{x}$)
  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : xy = 1$ (ist nicht erfüllt, da es keine Zahl gibt, die mit *jeder* Zahl $\neq 0$ multipliziert Eins ergibt)
  „kompliziertes“ Beispiel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \varepsilon$

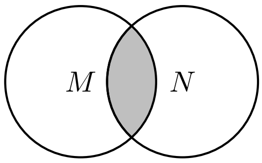
2.6 Verknüpfungen

Seien im Folgenden M und N stets Mengen.

2.6.1 Schnitt

$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \cap N = \{4\}$.

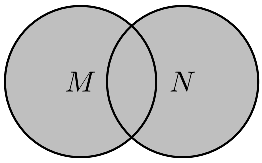
Venn-Diagramm $M \cap N$:



2.6.2 Vereinigung

$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Venn-Diagramm $M \cup N$:

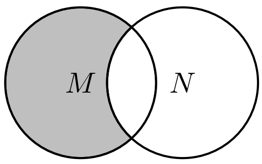


2.6.3 Differenzmenge

$M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$
Beispiel:
Für $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$
ist $M \setminus N = \{1, 2, 3\}$.

Falls N Teilmenge von M ist (siehe 2.7.2), so schreibt man manchmal anstatt $M \setminus N$ auch N^c (sprich „N Komplement“), wenn klar ist, welche Obermenge (hier M) gemeint ist.

Venn-Diagramm $M \setminus N$:



2.7 Grundbegriffe

2.7.1 Disjunkte Mengen

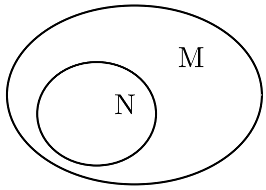
Wenn $M \cap N = \emptyset$, also wenn M und N keine gemeinsamen Elemente besitzen, sagt man M und N sind disjunkt.

2.7.2 Teilmenge

Gilt „$x \in N \Rightarrow x \in M$“ oder analog „$\forall x \in N : x \in M$“, so schreiben wir $N \subseteq M$ und sagen „N ist Teilmenge von M“.

Anstatt $N \subseteq M$ schreiben wir auch $M \supseteq N$ und sagen „M ist Obermenge von N“, falls dies im Kontext geschickter erscheint.

Veranschaulichung:



2.7.3 Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ enthält alle Teilmengen von M, also $\mathcal{P}(M) := \{X : X \subseteq M\}$.
Beispiel: Ist $M := \{1, 2\}$, dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

2.7.4 Kartesisches Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen.
Dann heißt die Menge der *geordneten* n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}$$

kartesisches Produkt oder auch Kreuzprodukt.
Beispiel: $\{a, b, c\} \times \{0, 1\} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$

Behauptung: Das Kartesische Produkt ist nicht kommutativ.

Beweis: Da Tupel geordnet sind, gilt $(x, y) \neq (y, x)$ für beliebige $x \neq y$ und damit

$$\begin{aligned}\{0, 1\} \times \{a, b, c\} &= \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\} \\ &\neq \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\} = \{a, b, c\} \times \{0, 1\}\end{aligned}$$

Wir haben also mindestens ein Gegenbeispiel und daher kann das kartesische Produkt nicht mehr allgemein kommutativ sein. □

2.7.5 Gleichheit zweier Mengen

Gilt $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$, so heißen die beiden Mengen M und N gleich (Schreibweise $M = N$). Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Element aus M auch Element von N ist und umgekehrt.

2.8 Gesetze

2.8.1 DeMorgan'sche Regeln

Seien M, N Mengen.

Behauptung: Es gilt $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$. (Die Komplemente sind in irgendeiner Menge gebildet, die Obermenge von M und N ist.)

Beweis: Wir müssen die zwei Richtungen $(M \cap N)^c \subseteq M^c \cup N^c$ und $(M \cap N)^c \supseteq M^c \cup N^c$ zeigen.

'$\subseteq$' Sei $x \in (M \cap N)^c$ beliebig.
Also ist $x \notin (M \cap N)$ oder anders geschrieben $\neg(x \in (M \cap N))$. Nach Definition des Schnitts also $\neg((x \in M) \wedge (x \in N))$ und mit den DeMorgan'schen Regeln für Aussagen (1.5.1) $\neg(x \in M) \vee \neg(x \in N)$, was wieder „normal" geschrieben bedeutet $x \notin M \vee x \notin N$. Das heißt $x \in M^c \vee x \in N^c$ und somit nach Definition der Vereinigung $x \in (M^c \cup N^c)$.
Insgesamt haben wir also für beliebiges x gezeigt: $x \in (M \cap N)^c \Rightarrow x \in (M^c \cup N^c)$ und damit $(M \cap N)^c \subseteq M^c \cup N^c$.

'$\supseteq$' Dieses Mal fassen wir uns etwas kürzer:
Sei $x \in (M^c \cup N^c)$.
Also ist $x \in M^c$ oder $x \in N^c$ und damit $x \notin M$ oder $x \notin N$. Das heißt $x \notin (M \cap N)$, also $x \in (M \cap N)^c$.
Insgesamt haben wir also gezeigt: $x \in (M^c \cup N^c) \Rightarrow x \in (M \cap N)^c$ und damit $M^c \cup N^c \subseteq (M \cap N)^c$.

Wir haben also beide Richtungen gezeigt und damit gilt die Behauptung. □

Analog beweist man die zweite DeMorgan'sche Regel: $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$.

2.8.2 Assoziativität der Vereinigung

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen.

Behauptung: Es gilt $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$

Beweis: Wir zeigen hier beide Richtungen auf einmal:

$$\begin{aligned} x \in ((M_1 \cup M_2) \cup M_3) &\overset{(2.6.2)}{\iff} (x \in (M_1 \cup M_2)) \vee (x \in M_3) \\ &\overset{(2.6.2)}{\iff} ((x \in M_1) \vee (x \in M_2)) \vee (x \in M_3) \\ &\overset{(1.4.3)}{\iff} (x \in M_1) \vee ((x \in M_2) \vee (x \in M_3)) \\ &\overset{(2.6.2)}{\iff} (x \in M_1) \vee (x \in (M_2 \cup M_3)) \\ &\overset{(2.6.2)}{\iff} x \in (M_1 \cup (M_2 \cup M_3)) \end{aligned}$$

□

Aus diesem Grund können wir die Klammern auch weglassen, wir schreiben also $M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Analog zeigt man auch, dass $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$ gilt.

2.9 Übungen

Aufgabe 1

Betrachte:
$M_1 := \{1, 2\}$
$M_2 := \{2, 3\}$
$M_3 := \{X, y, 3\}$
$M_4 := \{x, y, z\}$

$M_5 := \{2, 4, 6\}$

Bestimme:

1. $M_1 \cap M_2$
2. $M_2 \cap M_3$
3. $M_3 \cup M_4$
4. $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5$
5. $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$
6. $M_1 \times M_2 \times M_3$
7. $M_1 \setminus M_2$
8. $M_3 \setminus M_4$
9. Bestimme alle Paare disjunkter Mengen.
10. Gilt $(M_1 \cap M_2) \subseteq M_5$?
11. $\mathcal{P}(M_2)$
12. $\mathcal{P}(\emptyset)$
13. $\mathcal{P}(\{a_1, a_2, a_3\})$
14. $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}\})$
15. $\mathcal{P}(\{\{\emptyset, a, \{a\}\}\})$

Aufgabe 2

Gib die Elemente der folgenden Mengen an:

1. $\{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1\}$
4. $\{x \in \mathbb{Z} : x < 100 \wedge \exists y \in \mathbb{Z} : y^2 = x\}$

3 Elementare Rechenoperationen

3.1 Begriffe

3.1.1 Term

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck, der zum Beispiel aus Zahlen, Variablen, Klammern und Verknüpfungen (wie + oder ·) besteht.
Grob gesprochen sind Terme also die korrekten Wörter der mathematischen Sprache.

Beispiele für Terme	Keine gültigen Terme
23	$)5-3)$
$5x+3$	$4+:3$
$\frac{1}{2}\cdot(4+8)$	$a\cdot$

3.1.2 Formel

Setzen wir Terme mit Vergleichsoperatoren ($=, \leq, <, \geq, >, \neq$) zusammen, erhalten wir Formeln.

Beispiel: $a^2+b^2=c^2$ oder $|a+b| \leq |a|+|b|$. (Zur Definition des Betrags siehe 3.4.)
Für Formeln der Form $a^2+b^2=c^2$ sagen wir meist Gleichung, für $|a+b| \leq |a|+|b|$ Ungleichung.

3.1.3 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind diejenigen Umformungen, welche den Wahrheitsgehalt einer Formel erhalten. Dazu gehören Addition und Subtraktion von beliebigen Zahlen und Multiplikation und Division mit beliebigen Zahlen $\neq 0$ auf beiden Seiten. Bei Multiplikation und Division mit negativen Zahlen muss dabei bei Ungleichungen der Vergleichsoperator „herumgedreht“ werden ($\leq \leftrightarrow \geq, \quad < \leftrightarrow >$). Vorsicht aber, wenn Variablen vorkommen, da dann nicht immer sofort offensichtlich ist, ob mit negativen Werten oder Nullwerten multipliziert / dividiert wird.

3.2 Lösungen von Gleichungen

Haben wir zwei Terme T_1 und T_2, in denen eine Variable vorkommt, so möchten wir herausfinden, für welche(n) Wert(e) der Variablen die Gleichung $T_1 = T_2$ erfüllt ist. Da sich dies umformen lässt zu $T_1 - T_2 = 0$, können wir also die Nullstellen des Terms $T_1 - T_2$ bestimmen.

3.2.1 Geraden

Wenn man in einem Koordinatensystem alle Punkte (x, y) mit $y = ax + b$ einträgt, so erhält man eine Gerade.
Die Nullstellen eines Terms $ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bestimmen wir durch einfaches Umstellen:

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

Zu diesem Problem gibt es also immer genau eine Lösung.

3.2.2 Parabeln

Wenn man in einem Koordinatensystem alle Punkte (x, y) mit $y = ax^2 + bx + c$ einträgt, so erhält man eine Parabel.

Die Nullstellen eines Terms $ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ finden wir mithilfe der „Mitternachtsformel“:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In Abhängigkeit der Diskriminanten $\Delta = b^2 - 4ac$ können wir die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ bestimmen:

- Ist $\Delta > 0$, so gibt es *zwei* Lösungen.
- Ist $\Delta = 0$, so gibt es *eine* Lösung.
- Ist $\Delta < 0$, so gibt es *keine* Lösung.

Die „p-q-Formel“ ist zur „Mitternachtsformel“ äquivalent. Betrachte dazu die Umbenennung $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ und folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 &\iff x^2 + px + q = 0 \\ &\iff x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimme die Nullstellen von $x^2 + 5x + 6$.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -3$$

3.2.3 Polynome

Haben wir Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, dann nennen wir einen Term der Form

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ein Polynom. Die Spezialfälle Gerade $a_1x + a_0$ und Parabel $a_2x^2 + a_1x + a_0$ haben wir eben besprochen.

3.2.4 Polynomdivision

Die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms zu finden ist sehr schwer, da es hierzu keine Formel gibt, in die wir einfach einsetzen können. Es bleibt die Möglichkeit, eine Nullstelle zu erraten und das Polynom durch Polynomdivision dann zu „vereinfachen“. Schaffen wir es, das Polynom soweit zu vereinfachen, dass ein quadratisches Polynom übrig bleibt, können wir mit der Mitternachtsformel die übrigen zwei Nullstellen berechnen. Ist x_0 eine erratene Nullstelle, so müssen wir bei der Polynomdivision durch $(x - x_0)$ dividieren. Da wir wissen, dass es sich hierbei um eine Nullstelle handelt, darf bei dieser Division kein Rest übrig bleiben.

Wir betrachten nun folgendes Beispiel, an dem der allgemeine Algorithmus klar werden sollte:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 5x^2 + 9x + 5\big) : \big(x + 1\big) = x^2 + 4x + 5 \\ \underline{-\,x^3 \;\; -\,x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 + 9x \\ \qquad \underline{-\,4x^2 - 4x} \\ \qquad\qquad\quad 5x + 5 \\ \qquad\qquad \underline{-\,5x - 5} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Da von $x^2 + 4x + 5$ die Diskriminante $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$ negativ ist, gibt es keine weiteren Nullstellen.

Übung: Finde die Nullstellen von $x^3 - 2x^2 - 29x - 42$. *Hinweis:* Eine Nullstelle ist 7.

3.2.5 Anzahl der Nullstellen eines Polynoms

Ein Polynom n-ten Grades, das heißt ein Polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$, hat maximal n reelle Nullstellen.

3.3 Binomische Formeln

Bestimmte Terme treten in der Mathematik immer wieder auf, sodass es für uns von Interesse ist, diese nicht jedes Mal ausrechnen zu müssen. Ein berühmtes Beispiel sind die drei binomischen Formeln, die schon ausgiebig in der Schule besprochen und benutzt wurden:

Behauptung: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beweis: Rechne die Formeln als **Übung** nach!

3.4 Betrag

3.4.1 Definition

Der Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch $|a| = a$, falls $a \geq 0$ und $|a| = -a$, falls $a < 0$.

Beispiele: $|5| = 5,\ |-3| = 3,\ |0| = 0$
$|x| = \sqrt{2} \iff x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$
$|x-5| = 7 \iff x - 5 = 7$ oder $-(x-5) = 7 \iff x = 12$ oder $x = -2$.

3.4.2 Gesetze

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad \text{(Positivität)}$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \text{(Homogenität)}$$
$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

3.5 Bruchrechnung

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist definiert durch $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$. Jedes Element aus $\mathbb{Q}$ heißt Bruch. Dabei ist a der Zähler und b der Nenner.

3.5.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Seien $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Gehen wir von links nach rechts, erweitern wir den Bruch um Faktor k. Gehen wir stattdessen von rechts nach links, so kürzen wir mit k.
Enthält der Zähler oder der Nenner eine Summe, so muss jeder Summand k enthalten, damit man kürzen darf.

3.5.2 Negative Brüche

Für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Seien im Folgenden $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$.

3.5.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche werden addiert / subtrahiert, indem beide Brüche auf den gleichen Nenner (Hauptnenner genannt) gebracht werden und anschließend die Zähler addiert / subtrahiert werden:

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 b_2} \pm \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 b_2} = \frac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

3.5.4 Multiplikation von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner jeweils multipliziert werden:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

3.5.5 Division von Brüchen

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

3.5.6 Übungen

Betrachte die auftretenden Variablen stets so, dass der Nenner $\neq 0$ ist.

1. Kürze:
   a) $\frac{64x}{12y}$
   b) $\frac{12xy+5y}{4xy-8xy}$
   c) $\frac{56x^2y-16xy^2}{24yz+40y^2}$
   d) $\frac{a^2-b^2}{5a+5b}$
2. Berechne:
   a) $\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$
   b) $\frac{x^2+y^2+3xy}{5x-5y} - \frac{xy}{x-y}$
   c) $\frac{4}{7x} \cdot \frac{21x}{8}$
   d) $\frac{1}{7} + \frac{1}{8}$
   e) $\frac{5a^2}{a-b} : \frac{35}{7a-7b}$
   f) $(\frac{4a}{3b} : \frac{7a}{9ab}) : \frac{42ab}{5}$
3. Löse die Gleichungen:
   a) $\frac{3z-8}{3z+8} = \frac{1}{2}$
   b) $\frac{2x+1}{x+5} = \frac{2x-1}{x+2}$

Motivation

Sei die Gleichung $a^n = b$ gegeben.

- Ist a und n bekannt, können wir durch Potenzieren b bestimmen.
- Ist n und b bekannt, können wir durch Wurzelziehen a bestimmen.
- Ist a und b bekannt, können wir durch Logarithmieren n bestimmen.

3.6 Potenzen

3.6.1 Definition

Seien im Folgenden $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist die n-te Potenz von a definiert durch

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

dabei heißt a Basis und n Exponent. Dies bedeutet anschaulich $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$.

Damit gilt insbesondere $0^0 = 1$ und $\forall n \neq 0 : 0^n = 0$.
Die Formel kann, falls $a \neq 0$ ist, auch für $n \in \mathbb{Z}$ erweitert werden, indem wir für $n < 0$ (also $-n > 0$) definieren

$$a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}.$$

Dabei ist für $0 \neq a \in \mathbb{R}$ stets $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

3.6.2 Potenzgesetze

Seien im Folgenden $a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
3. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
4. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3.6.3 Übungen

1. Berechne:
   a) 2^{10}
   b) $(-2)^3$
   c) 2^{-3}
2. Fasse zusammen:
   a) $5^2 3 x^3 y^3 z^2 \cdot 5^2 3^3 x y z^2$
   b) $3^2 a^{-2} b^5 \cdot 3^{-1} a^2 b^{-3}$

c) Achtung: Potenz vor Punkt vor Strich!
$-63ab^3 - (4ab)^3 \cdot 2^{-1} \cdot (-2a^{-2})$

d) $\frac{x^{10}x^n}{y^7y^{-m}x^3}$

e) $\left(\frac{a^2}{b^n} : \frac{a^3}{b^2}\right)^{-2} : \frac{a^2}{b^4}$

3.7 Wurzeln

3.7.1 Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Gleichung $b^n = a$ eine eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung für b. Diese wird als die n-te Wurzel von a (in Zeichen: $\sqrt[n]{a}$) bezeichnet. Die Zahl a heißt Radikand.
Damit gilt für $x \in \mathbb{R}$ also insbesondere auch $\sqrt{x^2} = |x|$.

3.7.2 Wurzelgesetze

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0},\ n, k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

1. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = |a|$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

3.7.3 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Seien $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Potenz von a mit den Exponenten $\frac{1}{n}$ definiert durch

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Mithilfe der Wurzel-Gesetze können wir dadurch die Potenzgesetze auf rationale Exponenten erweitern.

3.7.4 Anzahl der Lösungen der Potenzgleichung

In Abhängigkeit von a und n kann man die Anzahl der Lösungen von b für $b^n = a$ bestimmen:

1. Für ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Lösung: $\sqrt[n]{a}$.
2. Für ein gerades n und $a > 0$ existieren sowohl eine positive Lösung $\sqrt[n]{a}$ als auch eine negative Lösung $-\sqrt[n]{a}$.
3. Für ein gerades n und $a < 0$ existiert keine reelle Lösung.

3.7.5 Übungen

1. Berechne:
   a) $7\sqrt{x} - \sqrt{25x} - \sqrt{2x}$
   b) $\sqrt{140} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{20}$
   c) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$ (für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$)

d) $\sqrt[7]{\sqrt[9]{x}}$

e) $\frac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[7]{x^3}}}{\sqrt[7]{y^2 \cdot \sqrt{y}}}$

2. Erweitere so, dass der Nenner rational wird:

a) $\frac{7}{\sqrt{ab}}$ (für $a, b \in \mathbb{Q}$)

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\frac{28}{3+\sqrt{2}}$

3. Löse die Gleichung: $\sqrt{3x-21} = x-7$

3.8 Logarithmen

3.8.1 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0,\ b \neq 1$. Die eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $b^x = a$ heißt Logarithmus von a zur Basis b. Sie wird mit $x = \log_b a$ bezeichnet.

Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert, da für $a, b \leq 0$ die Gleichung nicht immer lösbar ist. Ist zum Beispiel a negativ und b positiv, so existiert kein x, das die Gleichung erfüllt. Der Fall $b = 1$ muss ausgeschlossen werden, da 1^x immer den Wert Eins hat, das heißt die Gleichung ist nur für $a = 1$ lösbar, aber dann nicht eindeutig bestimmt (da unendlich viele Lösungen existieren).

Beispiele: $\log_2 1024 = 10$, da $2^{10} = 1024$
$\log_{10} 1000 = 3$, da $10^3 = 1000$
$\log_2 \frac{1}{2} = -1$, da $2^{-1} = \frac{1}{2}$

Der Logarithmus zur Basis 10 kann mit lg, der Logarithmus naturalis (mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2,718281828$ als Basis) mit ln abgekürzt werden. Wird log ohne Basis angegeben, so muss aus dem Kontext gelesen werden, welche Basis gemeint ist.

3.8.2 Wichtige Werte des Logarithmus

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b \neq 1$ gilt:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $b^{\log_b a} = a$
4. $\log_b b^a = a$

3.8.3 Logarithmusgesetze

Seien im Folgenden $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $c \neq 1$. Dann gilt:

1. $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
2. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$
3. $\log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$, wenn zusätzlich gilt $a \neq 1$
4. $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$

3.8.4 Übungen

1. Berechne:
   a) $\log_4 64$
   b) $\log_2 \frac{1}{16}$
   c) $\log_3 \sqrt{3}$

2. Fasse zusammen:
   a) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$
   b) $\frac{1}{5}\ln x - \frac{1}{10}\ln x^2 + 3\ln x - \frac{1}{2}\ln x^2$

3. Forme so um, dass nur Vielfache von $\ln 5$ verwendet werden: $\ln\sqrt{\frac{1}{5}}$

4. Schreibe als Summe von einzelnen Logarithmen:
   a) $\ln\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{5} = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 5) = -\frac{1}{2}\ln 5$

5. Löse die Gleichungen:
   a) $\log_3(x-1) = 2$
   b) $\log_2 x = \log_3 x$
   c) $\lg(5x) + \lg 2 = 3 - \lg(4x)$
   d) $\sqrt[3]{3^{x+6}} = \sqrt[4]{3^{2x-2}}$

4 Summen- und Produktzeichen

4.1 Summenzeichen

4.1.1 Definition

Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Summe der Zahlen $a_k, \dots, a_n$ wird bezeichnet mit

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + \dots + a_n$$

Der Index i ist hierbei die Laufvariable (von $i = k$ bis $i = n$), wie man es von der Programmierung mit for-Schleifen her vielleicht schon kennt und kann natürlich auch durch eine andere Variable bezeichnet werden.

4.1.2 Beispiele

1. $\sum\limits_{i=1}^{7} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
2. $\sum\limits_{i=1}^{2} \log_2 i = \log_2 1 + \log_2 2 = 0 + 1 = 1$
3. $\sum\limits_{i=2}^{4} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
4. $3+5+7+9+11+\dots+23 = (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+\dots+(2\cdot 11+1) = \sum\limits_{i=1}^{11}(2i+1)$
5. $1 + 5 + 25 + 125 + 625 = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = \sum\limits_{i=0}^{4} 5^i$

4.1.3 Spezialfälle

1. Ist die untere Summationsgrenze geich der oberen, bedeutet dies, dass die Summe nur aus einem Summanden besteht:
$$\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$$
2. Ist die untere Summationsgrenze größer als die obere Summationsgrenze, wird das Ergebnis der Summe als Null definiert:
Formal: Seien $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $k > n$. Dann ist $\sum\limits_{i=k}^{n} a_i = 0$.

4.1.4 Rechenregeln

Seien im Folgenden $a_k, \dots, a_n, b_k, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$ und $k, n \in \mathbb{Z}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\sum\limits_{i=k}^{n} a_i = a_k + \dots + a_\ell + a_{\ell+1} + \dots + a_n = \sum\limits_{i=k}^{\ell} a_i + \sum\limits_{i=\ell+1}^{n} a_i$ mit $l \in \mathbb{Z}$ und $k \leq \ell \leq n$.
2. $\sum\limits_{i=k}^{n} (c \cdot a_i) = ca_k + ca_{k+1} + \dots + ca_n = c \cdot (a_k + \dots + a_n) = c \sum\limits_{i=k}^{n} a_i$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n}(a_i+b_i) &= (a_k+b_k)+(a_{k+1}+b_{k+1})+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n)+(b_k+b_{k+1}+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{i=k}^{n}a_i+\sum_{i=k}^{n}b_i\end{aligned}$$

4.1.5 Indexverschiebung

Manchmal will man die Summationsgrenzen einer Summe verschieben. Dabei ändert sich der Wert der Summe nicht, aber die Indizes werden nach oben/unten verschoben:

$$\sum_{i=k}^{n}a_i=\sum_{i=k\pm\ell}^{n\pm\ell}a_{i\mp\ell}$$

4.1.6 Beispiele

1. $\sum\limits_{i=2}^{4}(i-1)=\sum\limits_{i=2-1}^{4-1}((i-1)+1)=\sum\limits_{i=1}^{3}i=1+2+3=6$
   Dies erhält man, indem man $a_i=i$ setzt. Denn dann sind die oberen Schritte genau $\sum\limits_{i=2}^{4}a_{i-1}=\sum\limits_{i=2-1}^{4-1}a_{(i-1)+1}=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i$

2. Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n}(a_i-a_{i+1}) &= \sum_{i=k}^{n}a_i-\sum_{i=k}^{n}a_{i+1}\\ &= \sum_{i=k}^{n}a_i-\sum_{i=k+1}^{n+1}a_{i+1-1}\\ &= \sum_{i=k}^{n}a_i-\sum_{i=k+1}^{n+1}a_i\\ &= \left(a_k+\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)-\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i+a_{n+1}\right)\\ &= a_k+\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i-\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)-a_{n+1}\\ &= a_k-a_{n+1}\end{aligned}$$

   Ein Beispiel hiervon haben wir schon bei 4.1.2 3. gesehen.

4.2 Produktzeichen

Analog zum Summenzeichen wird das Produktzeichen definiert.

4.2.1 Definition

Seien $a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und k, $n \in \mathbb{Z}$. Das Produkt der Zahlen $a_k, \dots, a_n$ wird bezeichnet mit

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot \ldots \cdot a_n$$

Das leere Produkt $\prod\limits_{i=k}^{n} a_i$ mit $n < k$ wird hierbei definiert als Eins, also $\prod\limits_{i=k}^{n} a_i = 1$.

4.2.2 Übungen

1. Schreibe mit Summenzeichen:
   a) $-1 + 4 + 9 + 14 + 19$
   b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4$
2. Berechne für $c \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$:
   a) $\sum\limits_{i=1}^{4} 3i$
   b) $\prod\limits_{k=1}^{4} 2^k$
   c) $\sum\limits_{i=1}^{4} \sum\limits_{j=1}^{4} ij$
   d) $\prod\limits_{i=3}^{1} i$
   e) $\sum\limits_{i=1}^{m} c^2$
   f) $\sum\limits_{i=3}^{10} (2i-3) - 2\sum\limits_{i=1}^{8} i - 8$

4.3 Fakultät und Binomialkoeffizient

4.3.1 Definition (Fakultät)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

Dabei wird $n!$ gelesen als „n Fakultät“.

Beispiele: $6! = \prod\limits_{i=1}^{6} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$0! = \prod\limits_{i=1}^{0} i = 1$

4.3.2 Definition (Binomialkoeffizient)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

der Binomialkoeffizient.
Dabei wird $\binom{n}{k}$ gelesen als „n über k“.

Beispiel: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

4.3.3 Binomiallehrsatz

Mithilfe der Binomialkoeffizienten können wir die binomischen Formeln für allgemeine Potenzen erweitern. Es gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dabei lässt sich die Formel aufgrund der Kommutativität der Addition genauso schreiben als

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Setzt man statt b einfach $-b$ ein, erhält man die Verallgemeinerung der zweiten binomischen Formel:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^k b^k$$

4.3.4 Pascal'sches Dreieck

Wegen $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ können wir die dazu benötigten Binomialkoeffizienten mithilfe des Pascal'schen Dreiecks berechnen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

4.3.5 Übung

Berechne:

1. $(x+2)^3$
2. $(3x-5)^4$

5 Beweise

In diesem Abschnitt wollen wir vorführen, wie mathematische Beweise strukturiert sein sollen und auf was zu achten ist.

5.1 Behauptung - Beweis

Ein mathematischer Satz besteht immer aus zwei Teilen: Einer Behauptung in Form einer Aussage und einem Beweis der Gültigkeit dieser Behauptung. Dabei besteht die Behauptung selbst aus Voraussetzungen und der daraus resultierenden Schlussfolgerung. Wenn man also mit V die Konjunktion aller Voraussetzungen bezeichnet und mit S die Schlussfolgerung, so hat ein mathematischer Satz die Form „Es gilt $V \Rightarrow S$ “. Es wird also behauptet, dass diese Implikation wahr ist. Wenn man sich die Wahrheitstafel für die Implikation ansieht, bedeutet das, dass man Folgendes zeigen muss: Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, d.h. wenn V wahr ist, dann ist auch S wahr. Dies muss dann mit einem Beweis nachgewiesen werden. Manchmal gibt es auch keine Voraussetzungen. Dann muss man beweisen, dass S ohne Voraussetzungen wahr ist (z.B. „5 ist eine Primzahl “).

Beispiel:

Behauptung: $\underbrace{\text{Seien } m \text{ und } n \text{ gerade Zahlen.}}_{\text{Voraussetzung}}$ $\underbrace{\text{Dann ist auch } m+n \text{ gerade.}}_{\text{Schlussfolgerung}}$

Beweis: Seien m, n gerade Zahlen. Das heißt es gibt zwei ganze Zahlen m' und n', für die gilt: $m = 2m'$ und $n = 2n'$. Dann ist

$$m + n = 2m' + 2n' = 2(m' + n'),$$

also $m + n$ auch gerade. □

Das Ende eines Beweises markieren wir oft durch das Symbol □ wozu wir sagen „Beweis abgeschlossen“. Hierfür sieht man auch viele andere Symbole, wie zum Beispiel: q.e.d. (quod erat demonstrandum, aus dem Lateinischen: was zu zeigen war) oder auch ■.

Bei einem selbst durchgeführten Beweis ist es immer klug darauf zu achten, ob alle Voraussetzungen verwendet wurden. Ist dies nicht der Fall, ist mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Fehler im Beweis, da mathematische Aussagen normalerweise nur die nötigsten Voraussetzungen fordern. So kann zum Beispiel obige Behauptung nicht bewiesen werden, wenn wir in unserem Beweis nur von beliebigen ganzen Zahlen anstatt von geraden Zahlen ausgegangen wären.

5.2 Axiome

Zum Beweis einer Aussage dürfen immer nur diejenigen Aussagen verwendet werden, die bisher schon gezeigt wurden. Das Grundgerüst dazu bilden Axiome, also unstrittige Voraussetzungen, auf denen die gesamte Mathematik aufgebaut ist. Zum Beispiel werden die natürlichen Zahlen formal mithilfe der Peano-Axiome eingeführt, was wir hier aber vermeiden wollen, da dies sehr viel Zeit in Anspruch nehmen würde.
Vorsicht mit Sätzen aus der Schule! Da diese nur selten bewiesen werden, darf man sie nicht in Beweisen benutzen.

5.3 Begriffe

Je nach Art und Wichtigkeit einer Aussage unterscheiden wir mit folgenden Namen:

- Definition: Eine Namensgebung für einen Sachverhalt.

- Satz: Eine wichtige Aussage.
- Theorem: Eine sehr wichtige Aussage.
- Lemma: Ein Hilfssatz, zur Hinführung auf einen Satz.
- Korollar: Eine direkte Folgerung aus einem Satz.

5.4 Genau dann, wenn

Manche mathematischen Sätze sind von der Form: Die Aussage A gilt genau dann, wenn B gilt. Das bedeutet, dass man zu zeigen hat, dass $A \iff B$ eine wahre Aussage ist. Dazu zeigt man meist, dass die beiden „Richtungen", also Implikationen, $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gelten. Dieses Vorgehen ist in Ordnung, da wir in 1.4.2 die logische Äquivalenz von $A \iff B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ bewiesen haben.
Bei dieser Gelegenheit noch ein Wort zur Sprechweise: Statt „Wir zeigen, dass $A \Rightarrow B$ eine wahre Aussage ist." oder „Wir zeigen, dass $A \Rightarrow B$ gilt." sagt man in der Mathematik meistens kurz „Wir zeigen $A \Rightarrow B$.". Genauso ist die Sprechweise „Wir zeigen $A \iff B$." zu verstehen.

5.5 Quantoren

5.5.1 Verwendung von Beispielen

Aufpassen muss man bei der Verwendung von Beispielen.
Wollen wir eine Aussage mit Allquantor beweisen, reichen Beispiele nicht aus, da die Aussage für *jedes* Element bewiesen werden muss. Hier tappt man sonst leicht in die Falle, da es Aussagen gibt, die für sehr viele Beispiele korrekt sind, aber nicht im Allgemeinen gelten. Bei kleinen endlichen Mengen kann es zwar möglich sein, die Aussage für jedes Element einzeln nachzurechnen, bei unendlichen Mengen ist dies jedoch nicht möglich. Das sollte aber niemanden davon abhalten, sich selbst Beispiele zum besseren Verständnis der Aussage zu machen!
Wollen wir wiederum eine Aussage mit Existenzquantor beweisen, genügt es uns, die Aussage für ein Beispiel zu beweisen. Denn wenn wir ein spezielles Beispiel angeben können, so ist die Existenz eines solchen gewiss.
Kommt ein Existenzquantor in einer Voraussetzung vor, können wir mit dem gegebenen Element arbeiten, ohne den konkreten Wert zu kennen.

Beispiele:

- **Behauptung:** $\forall x \in \{1, 3, 6, 7\} : x < 10$. (Diese Behauptung könnte man in der Voraussetzung-Schlussfolgerung-Formulierung auch so schreiben: Sei $x \in \{1, 3, 6, 7\}$. Dann ist $x < 10$.)

  Beweis: Lassen wir hier x nacheinander alle Werte aus $\{1, 3, 6, 7\}$ annehmen, so können wir die Aussage für jedes Element aus der Menge zeigen: $1 < 10, 3 < 10, 6 < 10$ und $7 < 10$. Wir haben damit die komplette Aussage bewiesen. □

- **Behauptung:** $\forall a, b \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

  Erklärung: Hier können wir nicht mehr alle möglichen Beispiele durchrechnen, da dies unendlich viele sind.

  Beweis: siehe (5.9 Beispiel)

- **Behauptung:** $\exists x \in \{1, 3, 6, 7\} : x$ ist gerade.

  Beweis: Wählen wir hier $x = 6$, so ist x gerade. Also gibt es ein x in $\{1, 3, 6, 7\}$, das gerade ist. □

- **Behauptung:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 - n + 41$ im Allgemeinen *keine* Primzahl.

  Erklärung: Beginnt man hier, sich Beispiele zu überlegen, besteht die Gefahr zu glauben, dass der Term bei Einsetzen von natürlichen Zahlen nur Primzahlen liefert. Dies kommt davon, dass für $1 \leq n \leq 40$ tatsächlich nur Primzahlen herauskommen.

  Beweis: Wählen wir $n = 41$, so ergibt sich die Zahl $n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, welche offensichtlich keine Primzahl ist, da sie Quadratzahl ist. $\square$

5.5.2 Verneinung von Quantoren

Wollen wir zeigen, dass eine Eigenschaft nicht für alle $x \in M$ gilt, so ist ein $x \in M$ ausreichend, das diese Eigenschaft nicht mehr erfüllt. Damit gilt:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \text{ ist logisch äquivalent zu } \exists x \in M : \neg A(x)$$

Ebenso muss eine Eigenschaft für alle Elemente nicht erfüllt sein, damit wir sagen können, dass kein Element existiert, das diese Eigenschaft besitzt. Damit gilt:

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \text{ ist logisch äquivalent zu } \forall x \in M : \neg A(x)$$

Beispiel: Betrachten wir die in 2.5 angegebene Aussage $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$ diesmal für $\mathbb{Z}$, also $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1$, so gilt diese nicht mehr:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1) &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \neg(\exists y \in \mathbb{Z} : xy = 1) \\ &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \forall y \in \mathbb{Z} : \neg(xy = 1) \\ &\iff \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \forall y \in \mathbb{Z} : \ xy \neq 1 \end{aligned}$$

Wählen wir zum Beispiel $x = 2$, so ist für alle ganzen Zahlen y schon $xy \neq 1$, da $y \cdot 2$ gerade und 1 ungerade ist.

5.6 Zyklisches Beweisverfahren

Wollen wir beweisen, dass mehrere Aussagen äquivalent sind, so können wir dies mithilfe mehrerer Folgerungen zeigen. Angenommen wir wollen die Äquivalenz der Aussagen A, B, C, D zeigen. Ohne den Zirkelschluss müssten wir zeigen:

$$(A \iff B) \wedge (A \iff C) \wedge (A \iff D) \wedge (B \iff C) \wedge (B \iff D) \wedge (C \iff D)$$

Wir müssen dabei daran denken, dass $\iff$ meist in zwei Richtungen gezeigt wird. Es sind hier also zwölf Richtungen zu zeigen.
Mit den Zirkelschluss müssen wir nur noch folgende vier Aussagen zeigen:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow A)$$

Dies reicht aus, da wir so implizit schon alle zwölf Richtungen gezeigt haben. Zum Beispiel folgt die Aussage $C \Rightarrow B$ durch $C \Rightarrow D \Rightarrow A \Rightarrow B$.

5.7 Indirekte Beweise

Allgemein sind wir daran interessiert, Aussagen der Form $A \Rightarrow B$ zu beweisen. Dabei spielt A die Rolle der Voraussetzung und B die daraus ableitbare Aussage. Manchmal können wir die Aussage $A \Rightarrow B$ nicht direkt zeigen oder der direkte Weg ist komplizierter als eine dazu logisch äquivalente Aussage zu zeigen. Dann können wir eines der folgenden Beweisverfahren verwenden:

5.7.1 Kontraposition

Behauptung: $(A \Rightarrow B)$ ist logisch äquivalent zu $(\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Beweis: Wir stellen dazu die Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

□

Wir können also eine Aussage B auch aus den Voraussetzungen A folgern, indem wir von der negierten Schlussfolgerung $\neg B$ ausgehen und zeigen, dass dann die Voraussetzungen auch nicht erfüllt sein können ($\neg A$). Dies nennt man einen indirekten Beweis.

Beispiel:

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

Erklärung: Wir zeigen die Aussage durch einen indirekten Beweis. Wir wollen also die Aussage „Ist n nicht gerade, so ist auch n^2 nicht gerade“ beweisen.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$.
Ist n nicht gerade, also ungerade, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Dann gilt aber $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ und damit ist n^2 auch ungerade, also nicht gerade, und damit die Aussage bewiesen. □

5.7.2 Widerspruch

Wollen wir die Aussage A beweisen, so können wir folgendermaßen vorgehen:
Wir gehen davon aus, die Aussage A gelte nicht. Nun versuchen wir durch logische Schlüsse aus $\neg A$ eine zweite Aussage B zu folgern, von der wir wissen, dass sie falsch ist. Haben wir diesen Widerspruch erkannt, so kennzeichnen wir ihn mit einem Blitz $\lightning$. Es muss also $\neg A$ falsch gewesen sein und damit A eine wahre Aussage.

Die Korrektheit dieses Beweisverfahrens beruht auf folgender Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B$	$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$	$((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1

Da die Aussage $((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow A$ immer wahr ist (dies nennen wir Tautologie) und wir in unserem Beweis den ersten Teil der Aussage, also $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$, zeigen, muss nun also A gelten.

Beispiel: Die Irrationalität von $\sqrt{2}$
Euklid lieferte schon ca. 300 v. Chr. in seinem Buch „Elemente“ einen zahlentheoretischen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Auf der 1999 von den Mathematikern Paul und Jack Abad präsentierten Liste der (nach ihrer Meinung) 100 wichtigsten mathematischen Sätze taucht unter anderem auch diese Aussage auf:

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen a und b, so dass für den vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ gilt $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Also gilt auch $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sqrt{2}^2 = 2$, oder umgeformt $a^2 = 2b^2$. Somit muss a^2 eine gerade Zahl sein. Das geht nur, wenn a selbst schon gerade ist (siehe 5.7.1 Beispiel). Also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$. Es gilt damit auch $(2k)^2 = a^2 = 2b^2$ oder umgeformt $4k^2 = 2b^2$. Kürzen wir nun mit 2, erhalten wir $2k^2 = b^2$. Damit ist aber auch b^2 und damit b gerade. Also lässt sich der Bruch $\frac{a}{b}$ mindestens mit 2 kürzen. $\lightning$
Also war die Annahme falsch und somit muss $\sqrt{2}$ irrational sein. $\square$

5.8 Fallunterscheidung

Manchmal kann man eine Aussage mit einer Schlussweise nicht vollständig beweisen. Dann bietet sich eventuell eine Fallunterscheidung an. Jeder Fall wird einzeln bewiesen und die Zusammenfassung aller Fälle muss dann die Gesamtaussage abdecken.

Beispiel: Man kann auch Potenzen mit irrationalen Exponenten definieren. Wir werden das hier nicht näher ausführen, sondern verwenden in diesem Beispiel nur die Tatsache, dass dann auch die Rechenregeln für Potenzen aus 3.6.2 gelten.

Behauptung: Es gibt zwei irrationale Zahlen x und y, so dass x^y eine rationale Zahl ist.

Beweis:

Fall 1: Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational.
Wähle $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2}$, also x und y irrational.
Dann ist x^y nach Annahme rational.

Fall 2: Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational.
Wähle $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$, also x (nach Annahme) und y irrational.
Dann ist $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ und damit rational.

$\square$

Wir sehen, dass wir diesen Satz sogar beweisen können, ohne zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist. Tatsächlich kann man zeigen, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist.

5.9 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Die Abkürzung o.B.d.A. bedeutet ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Wir wollen damit aussagen, dass nur ein Teil der Aussage wirklich bewiesen wird, die Gesamtaussage daraus aber einfach gefolgert werden kann.

Beispiel:

Behauptung: Seien a und b positive reelle Zahlen. Dann gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.
Es ist o.B.d.A $a \geq b$ (ansonsten vertausche die Bezeichnungen von a und b).

Es gibt also ein $x \geq 0$ mit $a = b + x$. Dann ist auch $\frac{x^2}{4} \geq 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &= \frac{(b+x)+b}{2} \\
&= \frac{2b}{2} + \frac{x}{2} \\
&= b + \frac{x}{2} \\
&\overset{b,x\geq 0}{=} \sqrt{\left(b+\frac{x}{2}\right)^2} && \text{hier wird das o.B.d.A benötigt, also dass } x \geq 0 \Rightarrow b + \frac{x}{2} \geq 0 \\
&= \sqrt{b^2 + 2b\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{b^2 + bx + \frac{x^2}{4}} \\
&\overset{\frac{x^2}{4}\geq 0}{\geq} \sqrt{b^2 + bx} \\
&= \sqrt{(b+x)\cdot b} \\
&= \sqrt{a \cdot b}
\end{aligned}$$

□

5.10 Vollständige Induktion

5.10.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest. Für jedes $n \geq n_0$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte:

- $A(n_0)$ ist wahr.
- Für jedes $n \geq n_0$ ist '$A(n) \Rightarrow A(n+1)$' wahr.

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr.

5.10.2 Erklärung

Wollen wir von einer Aussage zeigen, dass sie für *alle natürlichen Zahlen* (oder ab einem bestimmten Wert an) gilt, so teilen wir den Beweis in drei Teile auf:

- Den Induktionsanfang (IA) beim kleinsten Element n_0 rechnen wir für diese feste Zahl einfach nach.
- In der Induktionsvoraussetzung (IV) legen wir die Grundlage für den Induktionsschritt, indem wir von der Richtigkeit der Aussage für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ ausgehen.
- Im Induktionsschritt (IS) versuchen wir nun die Aussage, basierend auf der Induktionsvoraussetzung, auch für $n+1$ zu zeigen. Ist die zu beweisende Aussage zum Beispiel eine Gleichung (oder Ungleichung), so formen wir den linken Teil der Gleichung für $n+1$ so um, dass ein Teil genau den linken Teil der Gleichung für n darstellt. Nun setzen wir für diesen mithilfe der Induktionsvoraussetzung den rechten Teil der Gleichung für n ein. Wenn wir jetzt den gesamten Term wieder in den rechten Teil der Gleichung für $n+1$ umformen, so sind wir fertig.

Nun ergibt sich die Aussage folgendermaßen für alle Zahlen $n \geq n_0$:
Im Induktionsanfang zeigen wir, dass die Aussage für n_0 gilt. In der Induktionsvoraussetzung setzen wir nun in Gedanken $n := n_0$. Im Induktionsschritt haben wir gezeigt, dass die Aussage also auch für $n + 1 = n_0 + 1$ gilt. Nun setzen wir in der IV $n := n_0 + 1$ und zeigen im IS, dass die Aussage für $n + 1 = (n_0 + 1) + 1 = n_0 + 2$ gilt. Dann $n := n_0 + 2$, also gilt die Aussage auch für $n + 1 = (n_0 + 2) + 1 = n_0 + 3$ und so weiter. Nach dem Dominoprinzip erreichen wir so alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

5.10.3 Beispiele

1. **Behauptung:** Der kleine Gauß

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: IA ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

IS ($n \to n + 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Weil man mit noch nicht so viel Übung oft nicht direkt sieht, auf was man kommen muss, kann man folgendes tun: Man weiß, dass man eine Gleichheit beweisen soll, also sollte der Induktionsschritt funktionieren. Man kann also auch die linke Seite erst vollständig berechnen und dies dann auch getrennt für die rechte Seite tun. Dann sollten die zwei Terme im jeweils letzten Schritt übereinstimmen.

In unserem Falle wäre das dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}\end{aligned}$$

Nun kann man den Induktionsschritt als eine zusammenhängende Gleichungskette aufschreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1\\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

2. **Behauptung:** Bernoulli-Ungleichung
   Für $-1 < x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: Sei $-1 < x \in \mathbb{R}$ beliebig.
IA ($n = 1$):

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$$

also insbesondere:

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$$

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

IS ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x)\\ &\overset{\text{IV}}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x)\\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}\\ &\geq 1 + nx + x\\ &= 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

□

5.10.4 Übungen

Zeige folgende Behauptungen

1. **Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

2. **Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. **Behauptung:** Geometrische Reihe
   Für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ gilt:

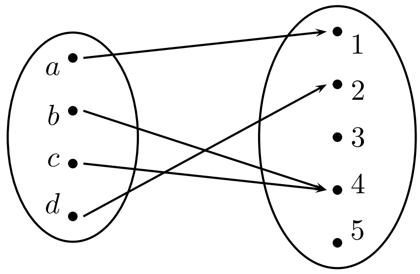
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

6 Abbildungen

6.1 Definition

Seien $M,\ N$ nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N : x \mapsto f(x)$ (gesprochen „f von M nach N mit x bildet ab auf $f(x)$“) ist eine Zuordnung, die *jedem* Element des Definitionsbereichs M *eindeutig* ein Element des Wertebereichs N zuordnet.
Das Bild von $x \in M$ bezeichnen wir mit $f(x) \in N$, x selbst wird Urbild von $f(x)$ genannt. Der Bildbereich $f(M) := \{f(x) : x \in M\} \subseteq N$ sind alle Punkte, die durch die Abbildung f von der Menge M aus erreichbar sind.

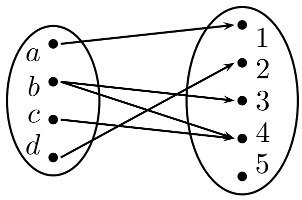
Beispiel: Sei $M := \{a, b, c, d\}$ und $N := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $f : M \to N$ mit $a \mapsto 1,\ b \mapsto 4,\ c \mapsto 4,\ d \mapsto 2$. Dann können wir die Abbildung auch verkürzt in der Form $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ schreiben.



Keine Abbildungen sind hingegen zum Beispiel

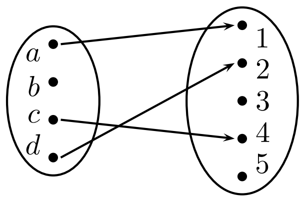
- $\begin{pmatrix} a & b & b & c & d \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

  Hier hat b kein eindeutiges Bild.



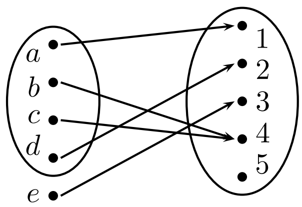
- $\begin{pmatrix} a & c & d \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

  Hier wird b gar kein Bild zugeordnet.



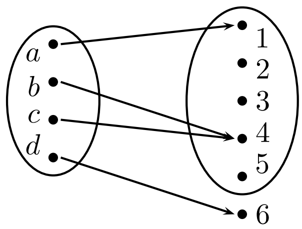
- $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

  Hier wird dem Element e, das nicht im Definitionsbereich liegt, ein Bild zugeordnet.



- $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

  Hier wird dem Element d ein Bild zugeordnet, das nicht im Wertebereich liegt.



6.2 Injektive Abbildungen

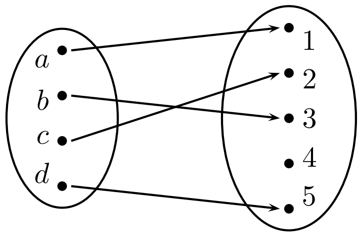
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, wenn gilt:

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

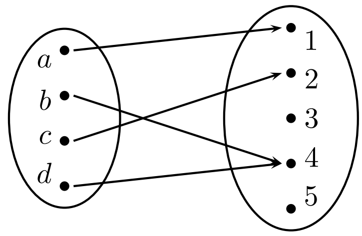
Alternativ lässt sich auch nachweisen (siehe 5.7.1 Kontraposition):

$$\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *höchstens* ein Urbild.



injektive Abbildung



nicht injektive Abbildung

6.3 Surjektive Abbildungen

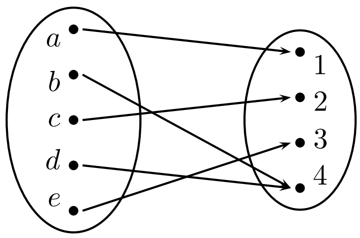
Eine Abbildung f heißt surjektiv, wenn gilt:

$$f(M) = N$$

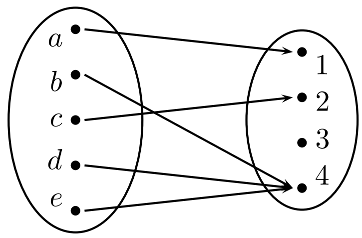
Dies ist äquivalent zu

$$\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$$

In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *mindestens* ein Urbild.



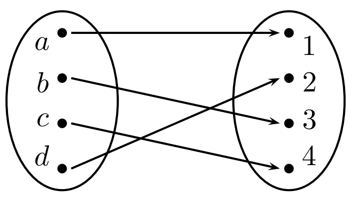
surjektive Abbildung



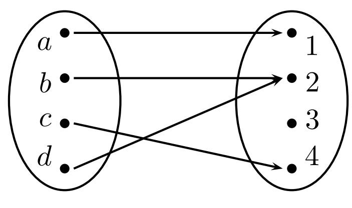
nicht surjektive Abbildung

6.4 Bijektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
In Worten: Für jedes Element im Wertebereich gibt es *genau* ein Urbild.



bijektive Abbildung



nicht bijektive Abbildung

6.5 Übungen

Seien $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $N := \{a, b, c\}$. Finde jeweils heraus, ob eine Abbildung vorliegt und wenn ja, welche Art von Abbildung vorliegt:

1. $f : M \to N$ mit $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & c \end{pmatrix}$

2. $g : M \to N$ mit $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ b & a & c \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$
4. $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x$
5. $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto |x|$
6. $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$
7. $\mathrm{succ} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$

6.6 Hintereinanderausführung von Abbildungen

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei Abbildungen.
Dann heißt die Abbildung $g \circ f : M \to P : x \mapsto g(f(x))$ (gesprochen „g nach f“), die Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g.

6.6.1 Assoziativgesetz

Behauptung: Seien $f : M \to N$, $g : N \to P$ und $h : P \to Q$ Abbildungen. Dann gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x) \end{aligned}$$

□

6.6.2 Kommutativgesetz (gilt nicht)

Behauptung: Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ.
(Das heißt es gibt Abbildungen f und g, sodass $g \circ f \neq f \circ g$)

Beweis: Betrachte dazu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.
Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ \neq x^2 + 1 = f(x^2) = f(g(x)) &= (f \circ g)(x) \end{aligned}$$

□

6.7 Umkehrabbildung

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist bijektiv.
2. Es gibt eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$. g ist eindeutig bestimmt und heißt Umkehrabbildung oder inverse Abbildung f^{-1} zu f.

6.8 Kardinalität von Mengen

Eine Menge M heißt endlich, wenn sie leer ist, oder es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ auf M gibt. Wir sagen dann M hat n Elemente und schreiben dafür $|M| = n$ oder auch $\#M = n$. Eine nicht-endliche Menge M heißt unendlich. Wir schreiben $|M| = \infty$. Sie heißt abzählbar unendlich oder kurz abzählbar, falls es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M gibt. Andernfalls heißt sie überabzählbar.

Beispiel: $|\{2, 3, 5, 7\}| = 4$, $|\emptyset| = 0$, $|\mathbb{Z}| = \infty$.

6.9 Hilberts Hotel

Wir nehmen an, es gäbe ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Nun kommt ein Bus mit unendlich vielen Sitzplätzen und das bisher leere Hotel wird somit ausgebucht. Besucher von Sitzplatz 1 bekommt Hotelzimmer 1, usw.
Jetzt will der Besitzer David Hilbert selbst in seinem Hotel übernachten. Ist dies möglich, obwohl das Hotel schon ausgebucht ist. Wenn ja, wie?
Ja es ist möglich, indem Hotelgast von Zimmer 1 in Zimmer 2, Hotelgast von Zimmer 2 in Zimmer 3, usw. geht. Dabei wird Zimmer 1 frei und Hilbert kann dort übernachten.

In einem anderen Fall kommt ein Bus mit Hilberts abzählbar unendlich großer Verwandtschaft an. Schafft Hilbert es auch hier wieder, seine Familie unterzubringen?
Auch dies ist möglich. Er versetzt Gast 1 in Zimmer 1, Gast 2 in Zimmer 3, Gast 3 in Zimmer 5 usw. Damit sind alle geraden Zimmer frei und diese vergibt er an seine Familie: Familienmitglied 1 in Zimmer 2, Mitglied 2 in Zimmer 4, Mitglied 3 in Zimmer 6 usw.

6.10 Mathematisches Analogon

Analog zum ersten Fall in Hilberts Hotel betrachten wir Folgendes:

Behauptung: $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ haben die gleiche Kardinalität (Hilbert ist Gast 0).

Beweis: Betrachte dazu die in (6.5.7) definierte Abbildung $\operatorname{succ} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$. Wir haben dort herausgefunden, dass diese Abbildung bijektiv ist, also die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ gleiche Kardinalität besitzen. □

Der zweite Fall veranschaulicht Folgendes:

Behauptung: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ haben die gleiche Kardinalität.

Erklärung: Betrachte dazu, dass die positiven Zahlen die schon vorhandenen Hotelgäste sind und die negativen Zahlen die neu eintreffende Verwandtschaft ist. Damit stellen die Personen die ganzen Zahlen dar. Das Problem besteht nun darin alle Gäste auf nur positiv durchnummerierte Zimmer (also die natürlichen Zahlen) zu verteilen.

Beweis: Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

bijektiv ist. Dazu versuchen wir den Satz 6.7 über Umkehrabbildungen zu verwenden. Betrachte also die Abbildung:

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade} \\ \frac{x-1}{2} & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Dann ist für $x \in \mathbb{Z}$ mit
  - Fall 1: $x \geq 0$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(2x+1) \overset{\substack{2x+1 \\ \text{ungerade}}}{=} \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

  - Fall 2: $x < 0$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(-2x) \overset{\substack{-2x \\ \text{gerade}}}{=} -\frac{-2x}{2} = x$$

  Also ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
- Für $x \in \mathbb{N}$ gilt
  - Fall 1: x gerade (also $-\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}_{<0}$)

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi\left(-\frac{x}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

  - Fall 2: x ungerade (also $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = (x-1)+1 = x$$

  Also ist $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Nach (6.7) ist φ also bijektiv. $\square$

7 Folgen

7.1 Definition

Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $A_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$.
Eine Abbildung $u : A_k \to \mathbb{R}$ heißt bei k beginnende Folge reeller Zahlen, in Zeichen: $(u_n)_{n \geq k}$.
u_n selbst heißt Glied der Folge oder Folgenglied, n der Index des Folgengliedes.

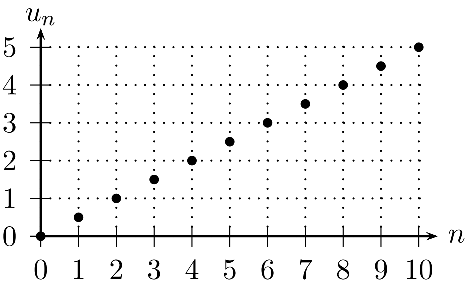
Schreiben wir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so meinen wir $(u_n)_{n \geq 1}$.

7.2 Beispiele

Wir bestimmen jeweils die ersten Folgenglieder und zeichnen sie je in ein Koordinatensystem:

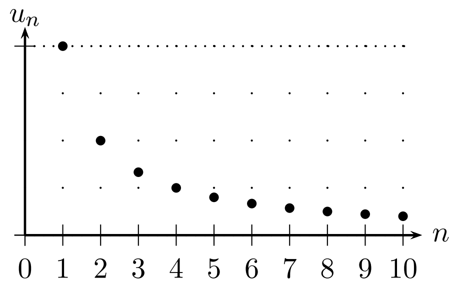
1. $(u_n)_{n \geq 0}$ mit $u_n := \frac{1}{2}n$.

n	0	1	2	3	4
u_n	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2



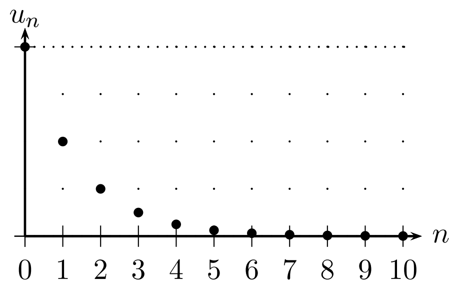
2. $(u_n)_{n \geq 1}$ mit $u_n := \frac{1}{n}$.

n	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$



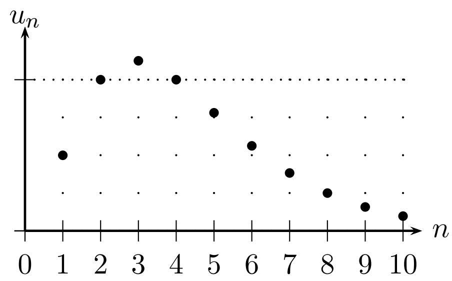
3. $(u_n)_{n \geq 0}$ mit $u_n := 2^{-n}$.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



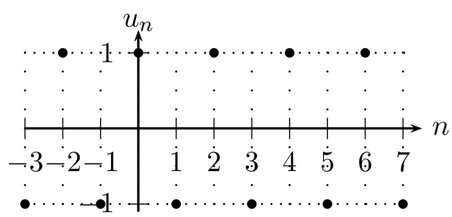
4. $(u_n)_{n \geq 1}$ mit $u_n := \frac{n^2}{2^n}$.

n	1	2	3	4	5
u_n	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	1	$\frac{25}{32}$



5. $(u_n)_{n \geq -3}$ mit $u_n := (-1)^n$.

n	-3	-2	-1	0	1
u_n	-1	1	-1	1	-1



7.3 Beobachtungen

1. Die Folge geht gegen $\pm\infty$. (siehe Beispiel 1.)
2. Die Folge häuft sich an genau einem Punkt. (siehe 2., 3. und 4.)
3. Die Folge häuft sich an mehreren Punkten. (siehe 5.)
4. Die Folge liegt komplett zwischen zwei Zahlen c und d. (siehe 2., 3., 4., 5.)
5. Die Folge wird immer größer / immer kleiner.

Ziel: Wir wollen Begriffe finden, um diese Eigenschaften von Folgen exakt zu beschreiben.

Im Folgenden bezeichnen wir mit u die Folge $(u_n)_{n\geq k}$.

7.4 Beschränkte Folgen

Die Folge u heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $s \geq 0$ gibt, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $-s \leq u_n \leq s$. Formal geschrieben:

$$\exists s \geq 0 : \forall n \geq k : |u_n| \leq s$$

7.5 Monotone Folgen

Eine Folge u heißt (streng) monoton wachsend, falls für alle $n \in A_k$ stets $u_n \leq u_{n+1}$ (bzw. $u_n < u_{n+1}$).
Sie heißt (streng) monoton fallend, wenn für $n \in A_k$ stets $u_n \geq u_{n+1}$ (bzw. $u_n > u_{n+1}$).

7.6 Konvergente Folgen, Grenzwert

Die Folge u konvergiert gegen die Zahl c, wenn für jede beliebig kleine positive Zahl ε alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index sich um maximal ε von c unterscheiden.
Formal geschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in A_k : \forall n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| < \varepsilon$$

Ist dies erfüllt, schreiben wir

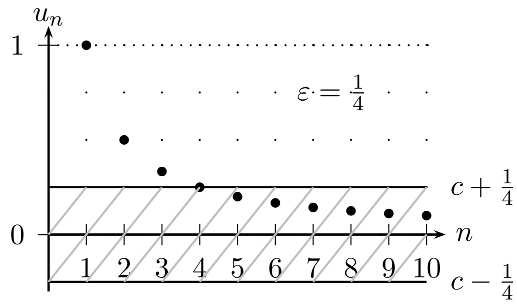
$$c = \lim_{n\to\infty} u_n$$

und sagen c ist *Grenzwert* der Folge.
Ist eine Folge nicht konvergent, so nennen wir sie divergent.
Konvergiert die Folge gegen $c = 0$, so nennen wir sie eine Nullfolge.

Beispiele:

1. Betrachte die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Nehmen wir $c = 0$ und wählen zum Beispiel $\varepsilon = 1$, so ist obige Aussage für jedes $n(\varepsilon) \geq 2$ erfüllt. Wählen wir hingegen $\varepsilon = \frac{1}{100}$, müsste $n(\varepsilon) \geq 101$ sein um die Aussage zu erfüllen.

Skizze:



Bei $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sind ab dem fünften Glied alle Glieder innerhalb des ε-Schlauchs.

Damit kommen wir zu folgender

Behauptung: Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 0. Formal: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $c := 0$.
Wähle $n(\varepsilon) \in A_k$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für ein beliebiges $n \geq n(\varepsilon)$ schon

$$|u_n - c| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

□

2. Betrachte die Folge $(n)_{n\geq 1}$.
Egal um welchen Wert c wir hier einen ε-Schlauch legen wollen, wird es immer Folgeglieder geben, die außerhalb dieses Schlauches liegen. Damit erhalten wir die

Behauptung: Die Folge $(n)_{n\geq 1}$ divergiert.

Beweis: Wir müssen (wegen $A_1 = \mathbb{N}$) zeigen, dass die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) : |c - u_n| < \varepsilon$$

für kein c für diese Folge *nicht* gilt, also dass die Aussage

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \exists n \geq n(\varepsilon) : |c - u_n| \geq \varepsilon$$

für jedes beliebige c gilt.
Da ein negativer Grenzwert bei einer positiven Folge nicht möglich ist, betrachten wir ein beliebiges $c \geq 0$. Wählen wir dann zum Beispiel $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so ist für ein beliebiges $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und $n := n(\varepsilon) + c$ (also $n \geq n(\varepsilon)$) schon

$$|u_n - c| = |n - c| = |n(\varepsilon) + c - c| = |n(\varepsilon)| \overset{n(\varepsilon)\in\mathbb{N}}{\geq} 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

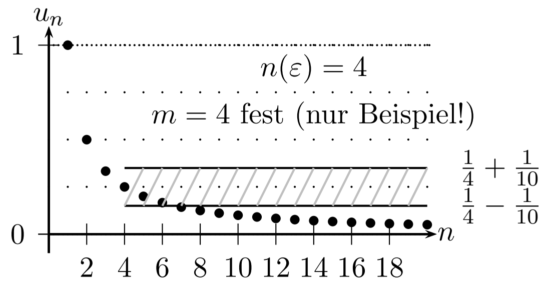
□

7.7 Cauchys Konvergenzkriterium

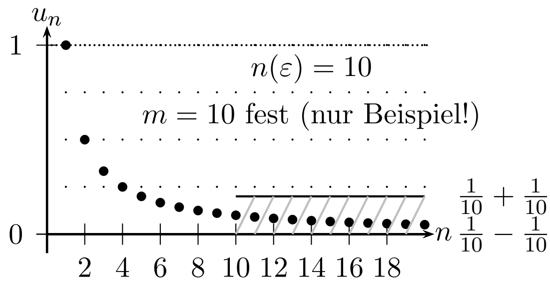
Die Folge u konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in A_k : \forall m, n \geq n(\varepsilon) : |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Grob gesprochen: Der Abstand zwischen zwei Folgengliedern u_m und u_n wird beliebig klein, wenn wir m und n genügend groß wählen.



Im Beispiel $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ eine Wahl von $n(\varepsilon) = 4$ noch nicht ausreichend.



$n(\varepsilon) = 10$ reicht aus, da ab dem 10. Folgeglied alle Folgeglieder zwischen 0 und $\frac{2}{10}$ sind, also der Abstand zwischen beliebigen von diesen höchstens noch $\frac{1}{10}$ sein kann.

Vorteil: Die Konvergenz einer Folge kann ohne Wissen über den Grenzwert gezeigt werden.

8 Reihen

8.1 Definition

Gegeben sei eine Folge $(u_n)_{n\geq k}$.
Wir bilden mit dieser Folge eine neue Folge $(s_n)_{n\geq k}$, die Folge der *Partialsummen*:

$$s_n = \sum_{i=k}^{n} u_i$$

Eine solche Folge $(s_n)_{n\geq k}$ heißt Reihe. Statt $(s_n)_{n\geq k}$ schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} u_i$.
Hat die Folge s_n einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$, dann definieren wir:

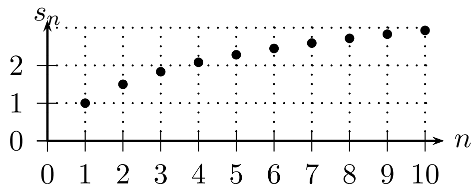
$$\sum_{i=k}^{\infty} u_i := c$$

Das Symbol $\sum_{i=k}^{\infty} u_i$ wird also mit zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet: Einmal als Symbol für die Folge der Teilsummen und einmal als Grenzwert der Folge.

8.2 Beispiele

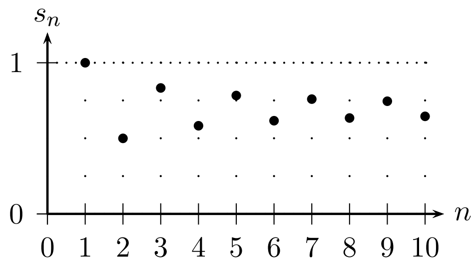
1. $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

n	1	2	3	4	5
s_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$



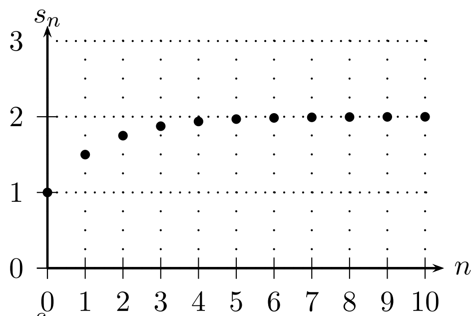
2. $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

n	1	2	3	4	5
s_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{47}{60}$



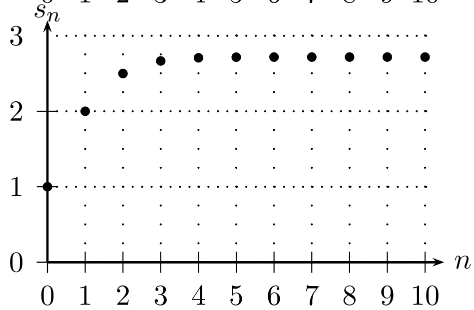
3. $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

n	0	1	2	3	4	5
s_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$



4. $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

n	0	1	2	3	4	5
s_n	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{65}{24}$	$\frac{163}{60}$



8.3 Bekannte / Berühmte Reihen

1. Harmonische Reihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
Diese Reihe ist divergent!

2. Alternierende harmonische Reihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$
Diese Reihe konvergiert! (Man kann zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \ln(2)$)

3. Geometrische Reihe:
Für $q \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
Für $|q| < 1$ gilt:
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$
Dies folgt direkt aus $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$.

4. allgemeine Potenzreihe: Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, so ist die zugehörige Potenzreihe:
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

5. Exponentialreihe (als Beispiel einer Potenzreihe):
$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$
Es gilt $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, wobei e die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828$ bezeichnet.

8.4 Divergenzkriterium

Ist die Folge $(u_n)_{n\geq k}$ keine Nullfolge, so divergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{n} u_i$.

Achtung: Ist $(u_n)_{n\geq k}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{n} u_i$ nicht notwendigerweise. Wir wissen durch Kontraposition nur: Falls $\sum_{i=k}^{n} u_i$ konvergiert, so ist $(u_n)_{n\geq k}$ eine Nullfolge.

8.5 Konvergenzkriterien für Reihen

8.5.1 Leibnizkriterium

Falls $(u_n)_{n\geq k}$ eine monotone Nullfolge ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n$.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert, da $\frac{1}{n}$ monoton fallende Nullfolge ist.

8.5.2 Wurzelkriterium

Gilt für die Folgenglieder von einem n_0 an stets $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q < 1$ für ein festes q, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2016^n}$ konvergiert, weil $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2016^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2016^n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{2016^n}} = \frac{1}{2016}$.
Man kann hier zum Beispiel $q = \frac{1}{2016}$ oder auch $q = \frac{1}{2}$ wählen.

8.5.3 Quotientenkriterium

Gilt für die Folgenglieder von einem n_0 an stets $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq q < 1$ für ein festes q, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, weil $\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$
Wir können hier für $n_0 = 3$ zum Beispiel $q = \frac{8}{9}$ wählen.

8.5.4 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit $b_n > 0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

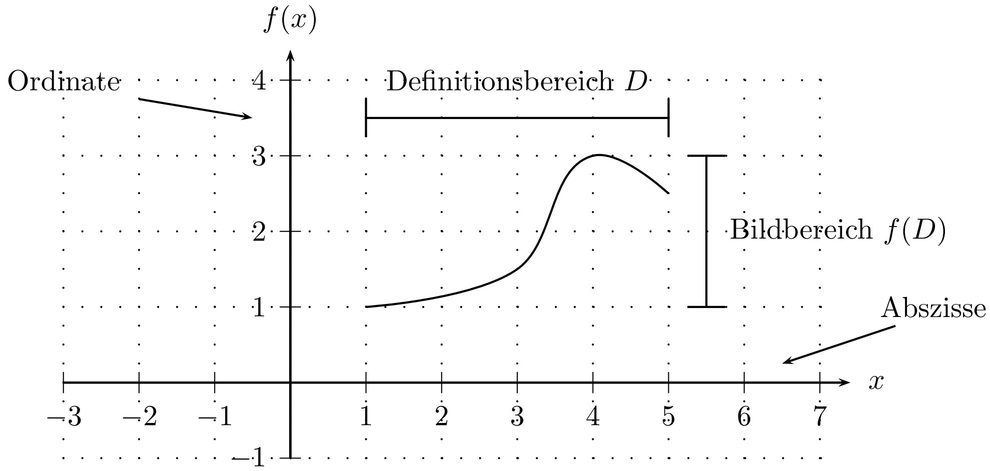
Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2016^n+1}$ konvergiert, weil $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2016^n}$ nach dem Wurzelkriterium konvergiert, und es gilt: $\left|\frac{1}{2016^n+1}\right| \leq \frac{1}{2016^n}$.

9 Funktionen

9.1 Definition

Eine reelle Funktion f einer Veränderlichen (Variablen) ist eine Abbildung von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

9.2 Geometrische Interpretation



Bemerkung: Praktisch sprechen wir nur dann von Funktionen, wenn der Definitionsbereich eine Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Intervallen ist.

9.3 Intervalle

Wir definieren für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

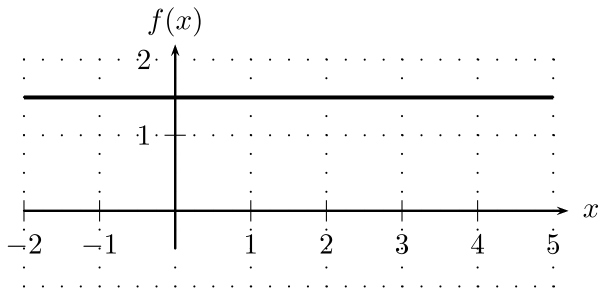
Dabei kann der Begriff auch mit $\pm\infty$ erweitert werden. Da $+\infty$ oder $-\infty$ keine reellen Zahlen sind, müssen sie aber immer aus dem Intervall ausgeschlossen sein.

Beispiele: $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

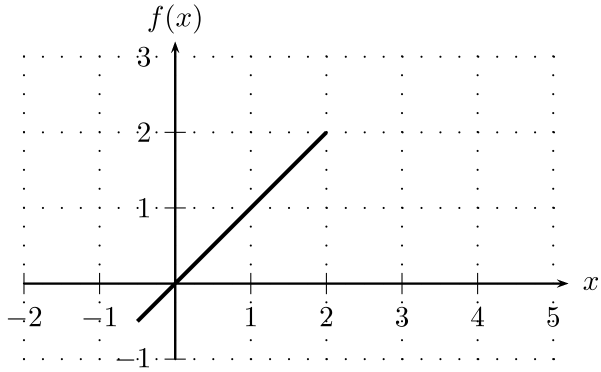
Manchmal sieht man bei den nicht eingeschlossenen Grenzen auch (statt] und) statt [. Also zum Beispiel $(2, 3] =]2, 3]$.

9.4 Elementarfunktionen

1. Konstante Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
   Beispiel: $c = \frac{3}{2}$



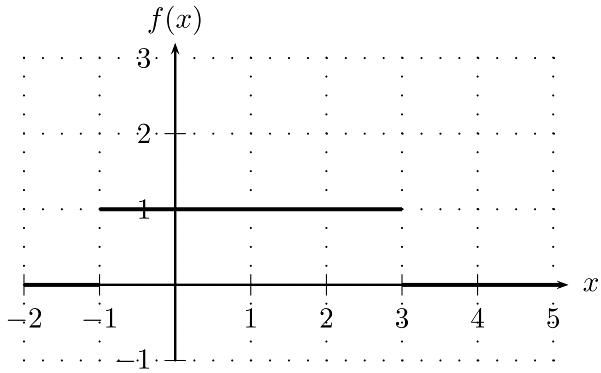
2. Identische Funktion: $\mathrm{id} : D \to \mathbb{R} : x \mapsto x$
   Beispiel: $D = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$



3. Indikatorfunktion: Die Indikatorfunktion gibt für $B \subseteq A$ an, ob ein Element x in B enthalten ist:

$$1_B : A \to \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin B \\ 1 & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

   Beispiel: $A = \mathbb{R}, B = [-1, 3]$



9.5 Monotonie

Eine Funktion f heißt (streng) monoton wachsend, wenn für $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) gilt. Entsprechendes gilt für (streng) monoton fallend.

9.6 Umkehrfunktionen

Analog zu Umkehrabbildungen existieren zu bijektiven Funktionen Umkehrfunktionen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass der Graph der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt wird.

Bemerkung: Ist eine Funktion *streng* monoton, so ist sie innerhalb ihres Bildbereichs stets umkehrbar.

Berechnung der Umkehrfunktion:
Löse die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf und vertausche am Ende die Variablennamen.

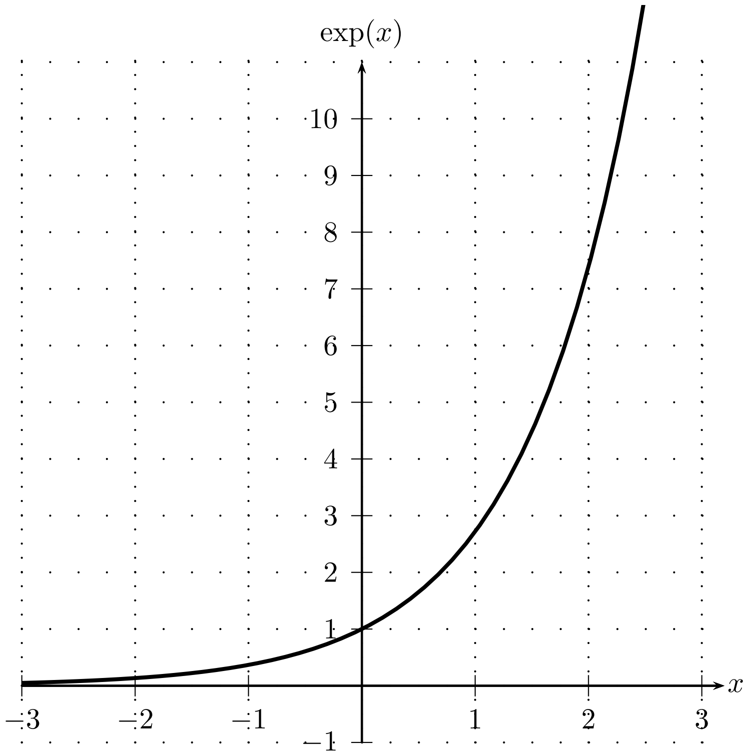
Beispiel: Betrachte die (offensichtlich bijektive) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x + 2$. Hier ist $y = 5x + 2$, also $x = \frac{y-2}{5}$.
Also ist die Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-2}{5}$

Übung: Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3$ bijektiv? Wenn ja, berechne die Umkehrfunktion.

9.7 Wichtige Funktionen

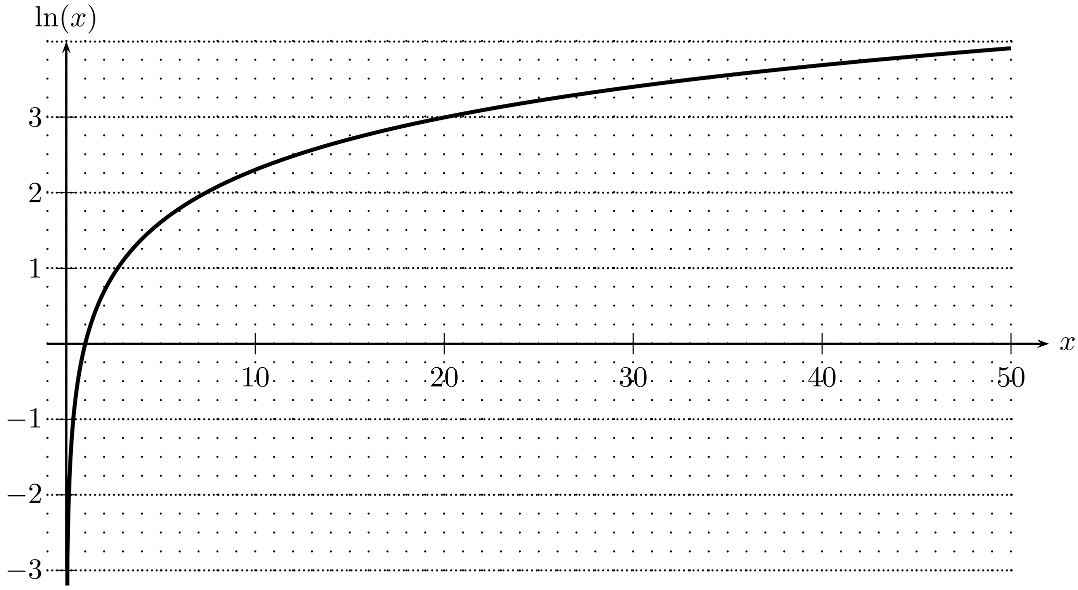
9.7.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

1. Die Exponentialfunktion $\exp(x)$:



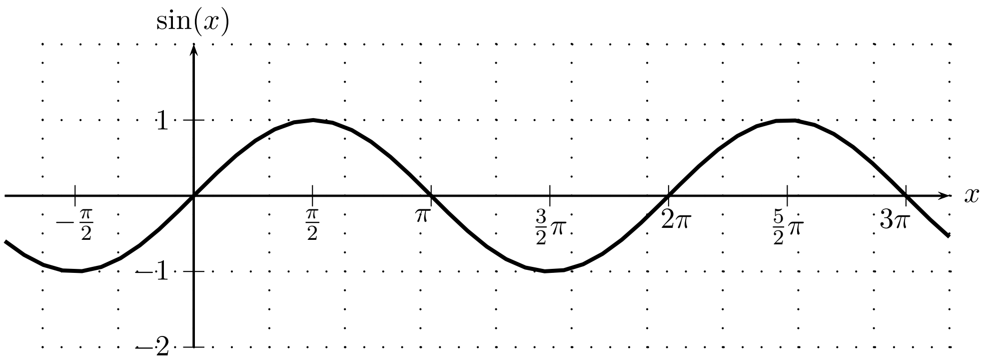
   Die zugehörige Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist der natürliche Logarithmus $\ln(x)$.

2. Die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ (mit der natürlichen Basis $e \approx 2,718281828$):



9.7.2 Trigonometrische Funktionen

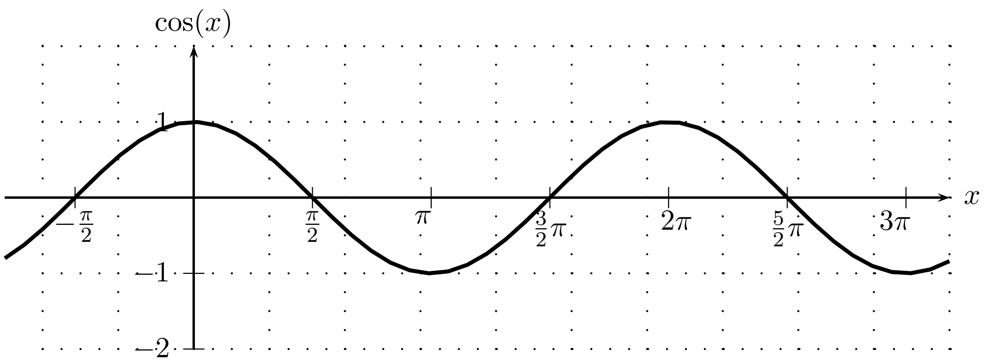
1. Der Sinus $\sin(x)$:



Wir sehen an der Skizze, dass die Sinusfunktion 2π-periodisch ist. Wichtige Werte sind:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

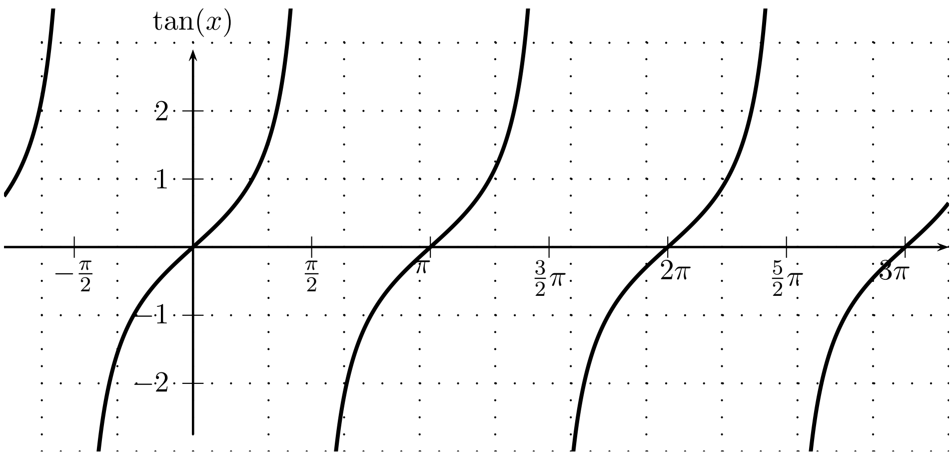
2. Der Cosinus $\cos(x)$:



Wir sehen an der Skizze, dass die Cosinusfunktion 2π-periodisch ist. Wichtige Werte sind:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

3. Der Tangens $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:



Wir sehen an der Skizze, dass die Tangensfunktion π-periodisch ist.

9.8 Stetigkeit

Da in der Natur meistens keine unerwarteten Sprünge auftreten (Aristoteles: natura non facit saltus), betrachten wir in der Mathematik häufig stetige Funktionen.

9.8.1 Definition (Folgenstetigkeit)

Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn für jede beliebige Folge $(u_n)_{n \geq k}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Dies bedeutet, wir können den Limes mit der Funktion vertauschen, also:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to\infty} u_n)$$

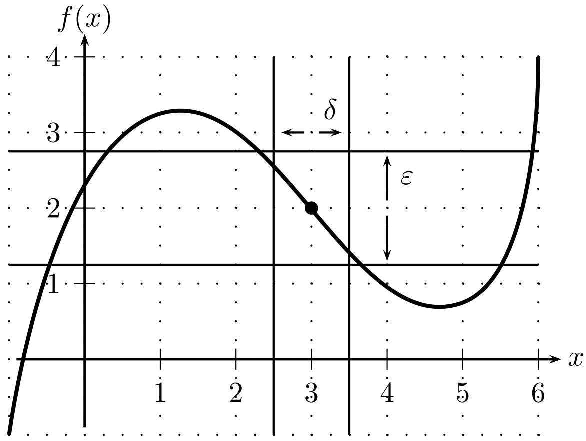
Eine Funktion heißt stetig, wenn sie in *jedem* Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

9.8.2 ε-δ-Kriterium

Folgende Charakterisierung der Stetigkeit in x_0 ist äquivalent:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Erklärung: Wir wählen einen Punkt $x_0 \in D$ und betrachten den dazugehörigen Funktionswert $f(x_0)$. Nun legen wir einen Schlauch der Höhe ε um diesen Wert. Können wir dann einen Schlauch der Breite δ um x_0 finden, dessen alle Funktionswerte im ε-Schlauch liegen, so nennen wir die Funktion stetig im Punkt x_0.

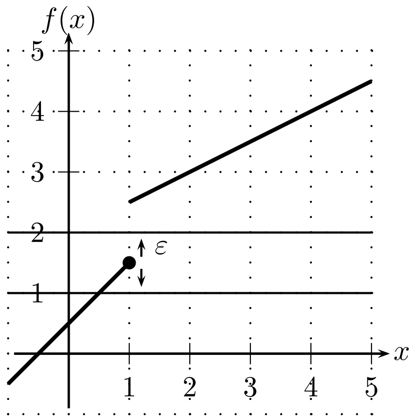


9.8.3 Beispiel

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{falls } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + 2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$

   Behauptung: Diese Funktion ist *nicht* stetig, da sie in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

   Beweis: Wählen wir hier zum Beispiel $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so sehen wir an der Skizze sofort, dass wir rechtsseitig kein passendes δ finden können.



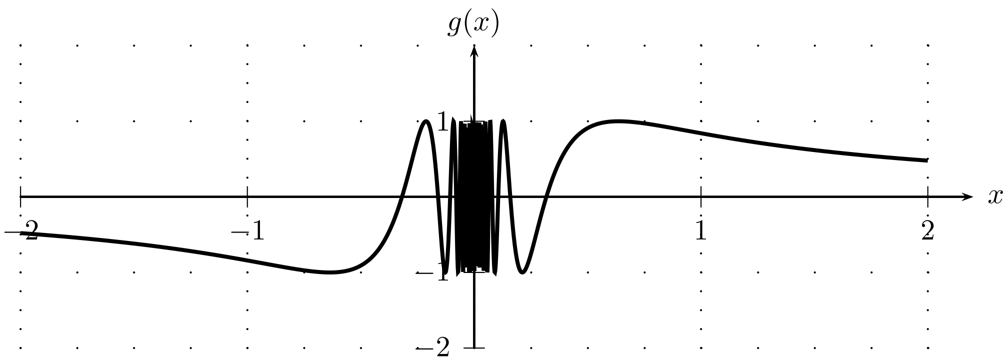
   Alternativ über Folgenstetigkeit:
   Sei $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. Da $1 + \frac{1}{n} > 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + 2 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{5}{2} \neq \frac{3}{2} = f(1) = f\left(\lim_{n\to\infty} u_n \right)$$

□

2. Dass Stetigkeit mehr bedeutet als „Zeichnen ohne Stift absetzen“, sehen wir an folgendem Beispiel:

   Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$



   Behauptung: Diese Funktion ist *nicht* stetig, da sie in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

Beweis: Wählen wir die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n := \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$.
Dann ist offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} g(u_n) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0 = g(0)$$

□

3. Da wir für eine stetige Funktion nur fordern, dass sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist, kann es sogar stetige Funktionen geben, bei denen wir den Stift (bei der Definitionslücke) absetzen müssen, die aber trotzdem stetig ist.

   Beispiel: Sei $h : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{falls } x<1 \\ \frac{x}{2}+2 & \text{falls } x>1 \end{cases}$
   Vergleiche die stetige Funktion h mit der nicht stetigen Funktion f:
   Bei dieser Funktion müssen wir die Stetigkeit im Punkt $x_0 = 1$ nicht betrachten. In allen Punkten aus dem Definitionsbereich ist die Funktion stetig, also ist sie stetig.

9.9 Eigenschaften stetiger Funktionen

9.9.1 Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sind $u, v \in [a, b]$ mit $u < v$, dann nimmt f auf $[u, v]$ jeden Wert zwischen $f(u)$ und $f(v)$ an.

Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist der Nullstellensatz mit den Voraussetzungen wie eben:

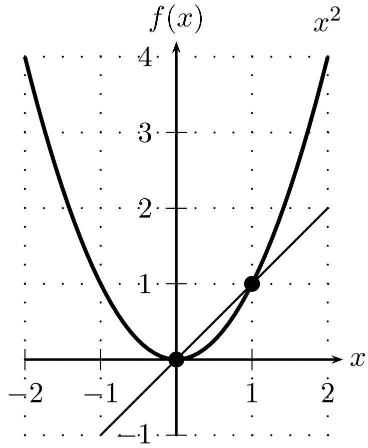
9.9.2 Nullstellensatz

Ist f stetig und $f(u)\cdot f(v) < 0$ (also $f(u) < 0$ und $f(v) > 0$ oder umgekehrt), so besitzt f mindestens eine Nullstelle im Intervall $[u, v]$.

Beispiel: Polynomfunktionen ungeraden Grades haben *immer* mindestens eine Nullstelle, da Polynomfunktionen stetig sind!

10 Differentialrechnung

10.1 Sekante

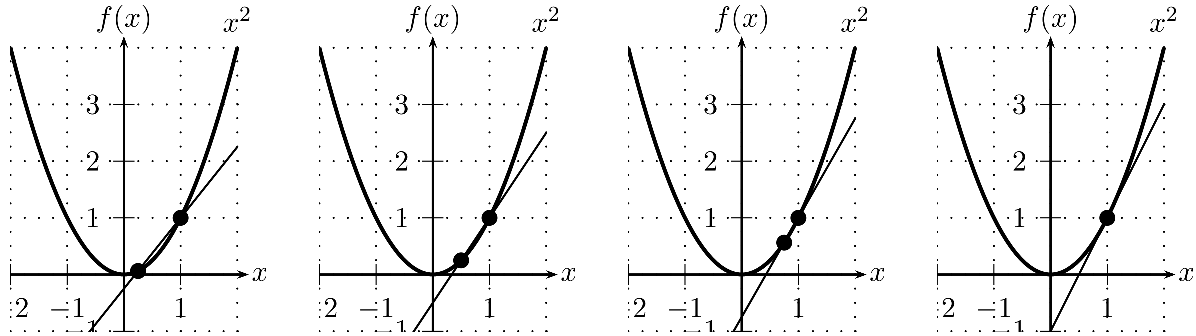


Die Sekante (Schneidende) ist eine Gerade durch zwei Punkte des Graphen einer Funktion f. Wir können mit der Sekante einfach die Steigung zwischen zwei Punkten darstellen. Haben wir die Punkte $(x, f(x))$ und $(c, f(c))$, so ist die Steigung der Sekante:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

10.2 Tangente

Die Tangente ist eine Gerade, die an einem Punkt $(c, f(c))$ einer Funktion f anliegt und deren Steigung dadurch approximiert, dass sie die Sekante zu einem „unendlich nahen Punkt " ist.



10.3 Ableitung

Die Tangente existiert genau dann, wenn

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von f an der Stelle c und wird mit $f'(c)$, $\frac{df}{dx}(c)$, $\frac{d}{dx}f(c)$ oder $\dot{f}(c)$ bezeichnet. Die Funktion heißt dann differenzierbar im Punkt c.

10.4 Differenzierbarkeit

Ist die Funktion f an jeder Stelle $c \in D$ differenzierbar, so heißt die Funktion differenzierbar.

Es gilt „differenzierbar $\Rightarrow$ stetig".
Dies bedeutet aber auch „nicht stetig $\Rightarrow$ nicht differenzierbar" (5.7.1 Kontraposition).

10.5 Stetig differenzierbar

Die Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und die Ableitung f' von f stetig ist.
Stetig differenzierbar heißt also *nicht*, dass die Funkton f stetig und differenzierbar ist. Dies ist klar, da aus Differenzierbarkeit schon Stetigkeit folgt.

10.6 Ableitungsregeln

10.6.1 Bekannte Ableitungen

Seien $a, c \in \mathbb{R}$.

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

10.6.2 Linearität der Ableitung

Seien f, g differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Beispiel: $\frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ (Wähle $\beta = 0$ und g beliebig)

10.6.3 Produktregel

Seien f, g differenzierbar.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

10.6.4 Quotientenregel

Seien f, g differenzierbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

10.6.5 Kettenregel

Seien f, g differenzierbar und $x \in D$ beliebig.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Beispiel: $\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$

10.7 Übungen

Berechne für $a, b, t \in \mathbb{R}$ folgende Ableitungen:

1. $\frac{d}{dx} 5$
2. $\frac{d}{dx} 7x$
3. $\frac{d}{dx} 3t$
4. $\frac{d}{dt} 3t$

5. $\frac{d}{dx}(x+2)^2$
6. $\frac{d}{dx}e^{5x}$
7. $\frac{d}{dx}e^{-x^2}$
8. $\frac{d}{dx}7x \cdot 2x^2$
9. $\frac{d}{dx}5x \cdot \cos(x)$
10. $\frac{d}{dx}\sin^2(x)$
11. $\frac{d}{dx}(\sin^4(x) - \cos^4(x))$
12. $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x}$
13. $\frac{d}{dx}\frac{x^4-1}{x^2+1}$
14. $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x^2}$
15. $\frac{d}{dx}e^{ax} \cdot \cos(bx)$
16. $\frac{d}{dx}\tan(x)$
17. $\frac{d}{dx}x\cos\left(\ln\left(4x^3\right) + \frac{\pi}{3}\right)$

10.8 Zusammenhang von Monotonie und Ableitung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.
Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton fallend.

10.9 Lokale Extrema

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $c \in]a, b[$.

10.9.1 Definition

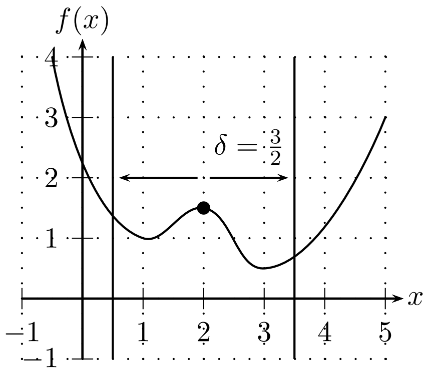
$f(c)$ heißt lokales Maximum, falls gilt:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in]a, b[: |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) \geq f(x)$$

$f(c)$ heißt lokales Minimum, falls gilt:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in]a, b[: |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) \leq f(x)$$

Liegt einer der beiden Fälle vor, so heißt $f(c)$ lokaler Extremwert und c lokale Extremstelle.



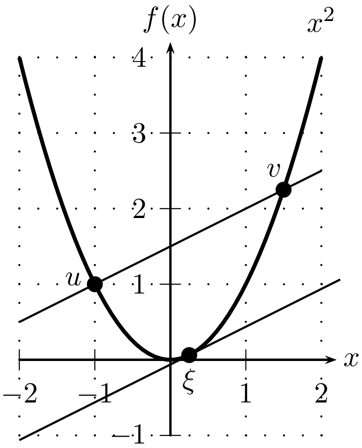
10.9.2 Zusammenhang von lokalen Extremwerten und der Ableitung

Ist f differenzierbar, so gilt:
Ist c eine Extremstelle, so ist $f'(c) = 0$.
Ist f zusätzlich zweimal stetig differenzierbar, so gilt:
Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0$, so ist $f(c)$ ein lokales Maximum.
Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist $f(c)$ ein lokales Minimum.

10.10 Mittelwertsatz

Sei J ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.
Seien $u, v \in J$ mit $u < v$.
Dann gibt es ein $\xi \in]u, v[$ mit

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(\xi).$$



11 Integralrechnung

11.1 Definition einer Treppenfunktion

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\varphi(x) = c_k$ für alle $x \in]t_{k-1}, t_k[$ mit $k = 1, \ldots, n$. Die Funktionswerte $\varphi(t_k)$ in den Teilpunkten t_k sind beliebig.
Bild:

11.2 Integral einer Treppenfunktion

Das Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ ist definiert als:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &= c_1 \cdot (t_1 - t_0) + c_2 \cdot (t_2 - t_1) + c_3 \cdot (t_3 - t_2) + \ldots + c_n \cdot (t_n - t_{n-1}) \\ &= c_1 \cdot (t_1 - a) + c_2 \cdot (t_2 - t_1) + c_3 \cdot (t_3 - t_2) + \ldots + c_n \cdot (b - t_{n-1})\end{aligned}$$

Beispiel von oben:

Wichtig: Man erhält so den *orientierten* Flächeninhalt, das heißt Flächen haben ein Vorzeichen und heben sich deswegen gegenseitig auf, wenn eine Fläche oberhalb der und eine gleich große Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

11.3 Integral einer Kurve

Sei $f : [a, b] \to^{R}$. Wir nehmen eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$. Wir wählen einen beliebigen Punkt z_i in jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ mit $i = 1, \ldots, n$.
Also: $z_1 \in [t_0, t_1], z_2 \in [t_1, t_2], \ldots, z_n \in [t_{n-1}, t_n]$.
Wir bilden eine Treppenfunktion φ mit:
$\varphi(x) = f(z_i)$ für alle $x \in]t_{i-1}, t_i[$ und $\varphi(t_i) = f(t_i)$.
Mit dieser Treppenfunktion aus n Intervallen bilden wir die Integralsumme:

$$I^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} \varphi(z_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Existiert der $\lim_{n\to\infty} I^{(n)}$, also die Integralsumme über 'unendlich viele' Intervalle, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} I^{(n)}$$

und f heißt dann integrierbar.

Beispiel: Wir wollen $\int_0^1 xdx$ berechnen. Dazu wählen wir als Teilintervalle stets n Intervalle gleicher Länge. Als z_i nehmen wir immer den Mittelpunkt des jeweiligen Intervalls $]t_{i-1}, t_i[$.

$$\begin{aligned}
I^{(1)} &= 1 \cdot (1-0) \\
&= 1 \\
I^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4} \\
I^{(3)} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3} \\
I^{(4)} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right) + \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \frac{4}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{8} \\
&\vdots \\
I^{(n)} &= \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten als Fläche also:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x dx &= \lim_{n\to\infty} I^{(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Warum ist dieses Ergebnis nicht unerwartet?
Wir erinnern uns an die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks mit den beiden Kantenlängen $a = 1 = b$.

11.4 Rechenregeln für das Integral

Im Folgenden seien f, g integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Formeln:

1. **Linearität des Integrals**
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

2. **Positivität des Integrals**
$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx$$
Ferner gilt: $f \leq g \iff \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

3. **Intervall-Additivität**
Sei $a < c < b$. So ist:
$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

4. **Das leere Integral**
$$\int_a^a f dx = 0$$

5. **Vertauschung der Intervallgrenzen**
$$\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$$

11.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $u \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(u) \cdot (b - a)$$

11.6 Integralfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann definieren wir durch

$$I_f : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

die zu f gehörende Integralfunktion.

11.7 Stammfunktion

Sei J ein beliebiges Intervall. Eine Funktion $F : J \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der integrierbaren Funktion f, wenn für alle $u, v \in J$ stets

$$\int_u^v f(x)dx = F(v) - F(u)$$

gilt.

11.8 Eigenschaften der Stammfunktion

Stammfunktionen sind nur bis auf eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ bestimmt (Beweisidee: Setze $G(x) = F(x) + c$ in obiger Definition ein).
Eine Stammfunktion heißt auch unbestimmtes Integral und wird oft mit $\int f dx$ oder $\int f(x)dx$ bezeichnet.

11.9 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist jede Stammfunktion G zu f differenzierbar und ihre Ableitung ist $G' = f$

11.10 Integrationsmethoden

11.10.1 Anwendung des Hauptsatzes

- $\int 0dx = c$
- $\int 1dx = x + c$
- $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

Übung:

1. $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + c$
2. $\int 42x^7 dx = \frac{21}{4}x^8 + c$
3. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$

11.10.2 Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel:
Für die Stammfunktion gilt:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Für das bestimmte Integral gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

Beispiel:

1.
$$\begin{aligned}\int x\cdot\sin(x)dx &= x\cdot(-\cos(x)) - \int 1\cdot(-\cos(x))dx\\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx\\ &= -x\cos(x)+\sin(x)+c\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \sin(x)\sin(x) - \int \cos(x)\sin(x)dx\\ &= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)dx\\ \iff 2\int \sin(x)\cos(x)dx &= \sin^2(x)+c'\\ \iff \int \sin(x)\cos(x)dx &= \frac{1}{2}\sin^2(x)+c\end{aligned}$$

11.10.3 Integration durch Substitution

Die Integration durch Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel:
Für die Stammfunktion gilt:

$$\int g'(f(x))\cdot f'(x)dx = g(f(x))+c$$

Für das bestimmte Integral gilt:

$$\int_a^b g'(f(x))\cdot f'(x)dx = g(f(b))-g(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(t)dt$$

Beispiel:

1.
$$\int e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)dx = e^{\sin(x)}+c$$

2.
$$\int \underbrace{f(x)}_{g'(x):=x} f'(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2+c$$

3.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{g'(x):=\frac{1}{x}}\cdot f'(x)dx = \int g'(f(x)\cdot f'(x)dx = \ln(|f(x)|)+c$$

11.11 Übungen

1.
$$\begin{aligned}\int e^x x dx &= \int xe^x dx\\ &= xe^x - \int 1\cdot e^x dx\\ &= xe^x - e^x + c\\ &= (x-1)e^x + c\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)dx &= x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)dx\\ &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)dx\\ &= x^2\sin(x) - 2(-x\cos(x)+\sin(x)+c')\\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) - 2c'\\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + c\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= \int \sin(x)\sin(x)dx\\ &= \sin(x)\cdot(-\cos(x)) + \int \cos^2(x)dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1-\sin^2(x)dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) + x + c' - \int \sin^2(x)dx\\ \iff 2\int \sin^2(x)dx &= -\sin(x)\cos(x) + x + c' + c''\\ \iff \int \sin^2(x)dx &= \frac{1}{2}(-\sin(x)\cos(x)+x) + c\end{aligned}$$

4.

$$\int \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

5.

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot(-2x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

6.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx = \ln(|x^2+3x+5|) + c$$

7.

$$\begin{aligned}\int e^{x^4+5}\cdot 20x^3dx &= \int e^{x^4+5}\cdot 4x^3\cdot 5dx\\ &= 5\int e^{x^4+5}\cdot 4x^3dx\\ &= 5e^{x^4+5} + c\end{aligned}$$

12 Komplexe Zahlen

12.1 Motivation

In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kann man nicht uneingeschränkt subtrahieren, und daher hat z.B. eine Gleichung wie $n+2=1$ keine Lösung für $n \in \mathbb{N}$.
Dies wird möglich durch Erweiterung von $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.
In der Menge $\mathbb{Z}$ kann man allerdings weiterhin nicht uneingeschränkt (durch Zahlen $\neq 0$) dividieren, und daher hat z.B. eine Gleichung wie $2z=1$ keine Lösung für $z \in \mathbb{Z}$.
Dies wird möglich durch Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.
In der Menge $\mathbb{Q}$ kann man nicht uneingeschränkt Wurzeln aus nicht-negativen Zahlen ziehen, und daher hat z.B. die Gleichung $q^2=2$ keine Lösung für $q \in \mathbb{Q}$.
Dies wird möglich in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.
Neue Problemstellung: Löse $r^2+1=0$
Lösung: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

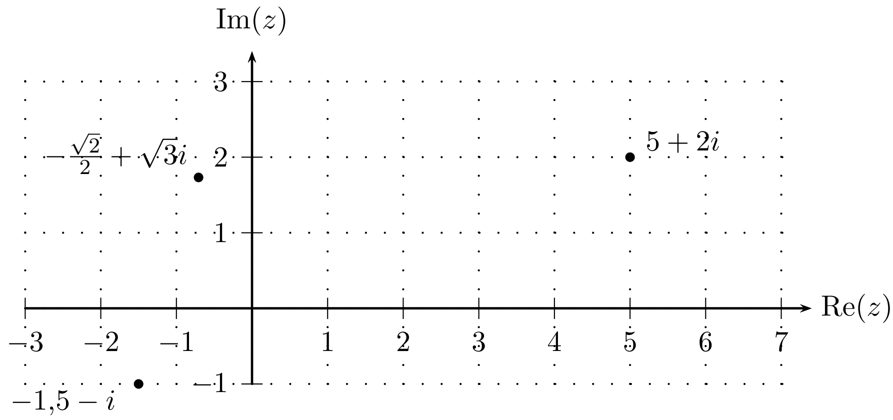
12.2 Definition

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird durch $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definiert. Dabei ist i bestimmt durch $i^2 = -1$. a heißt Realteil (abgekürzt mit $\mathrm{Re}(z)$ oder $\Re(z)$) und b Imaginärteil ($\mathrm{Im}(z)$ oder $\Im(z)$) von z.
Mit $\bar{z}$ bezeichnen wir die zu z konjugiert komplexe Zahl. Diese ist definiert durch $\bar{z} = a - ib$.

Konvention: Wir schreiben meist $a + ib$ für zwei Variablen a und b, aber mit Zahlen verdrehen wir die Reihenfolge von i und b. Zum Beispiel $2 + 3i$.

12.3 Gaußsche Zahlenebene

Die komplexen Zahlen werden graphisch in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht. Die x-Koordinate bestimmt dabei den Realteil und die y-Koordinate den Imaginärteil.



12.4 Rechenregeln

Seien im Folgenden $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$.

12.4.1 Addition / Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \end{aligned}$$

12.4.2 Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

12.4.3 Division

Wir versuchen wieder die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ zu erlangen und deswegen das i aus dem Nenner zu entfernen.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \\ &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Damit gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ also insbesondere

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

12.5 Betrag

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann ist der Betrag von z definiert als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

12.6 Fundamentalsatz der Algebra

Die komplexen Zahlen bieten uns den Vorteil, dass jedes Polynom n-ten Grades immer genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt.

12.7 Übungen

Seien $z_1 := 3 + 6i, z_2 := 10 - 5i$. Berechne:

1. $\bar{z}_1$
2. $\bar{z}_2$
3. $z_1 + z_2$
4. $z_1 - z_2$
5. $z_1 \cdot z_2$
6. $\frac{z_1}{z_2}$
7. $|z_1|$
8. $|z_2|$
9. Finde die Nullstellen von $X^2 + 9$.

13 Relationen

Wollen wir zusammengesetzte Daten, wie zum Beispiel Telefonbucheinträge, Namenslisten oder Klassenlisten mit Noten untersuchen, so verwenden wir Relationen.

13.1 Definition

Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ beliebige nichtleere Mengen.
Eine n-stellige Relation R über $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

Schreibweise: Für eine zweistellige Relation $\sim$ schreiben wir statt $(x, y) \in\sim$ oft einfacher $x \sim y$ und sagen x steht in Relation zu y.

13.2 Beispiele

1. Betrachte die Mengen:
   Personen := {Michael, Claudia}
   Einkommen := {1000€, 2000€, 3000€}
   Autos := {VW, Ferrari, Porsche, Mercedes}
   Wir definieren auf Personen × Einkommen × Autos zum Beispiel die Relation
   R_1 := {(Michael, 1000€, Ferrari), (Claudia, 3000€, Porsche)}.

2. Betrachte die Relation $R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R_2 := \{(2, 5), (23, 42), (-7, 6)\}$.

3. $R_3 \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $R_3 := \{(z, 2z) : z \in \mathbb{Q}\}$
   Hier gilt zum Beispiel: $(2, 4) \in R_3, (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \in R_3, (1, 1) \notin R_3$

4. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. $R_4 \subseteq M \times N$ mit $R_4 := \{(x, f(x)) : x \in M\}$.

13.3 Äquivalenzrelation

13.3.1 Definition

Sei M eine nichtleere Menge und $\sim \subseteq M^2 := M \times M$ eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall x \in M &: x \sim x && \text{(Reflexivität)} \\ \forall x, y \in M &: x \sim y \Rightarrow y \sim x && \text{(Symmetrie)} \\ \forall x, y, z \in M &: (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z && \text{(Transitivität)} \end{aligned}$$

Sind alle diese 3 Eigenschaften erfüllt, so spricht man von einer Äquivalenzrelation (auf M).

Motivation

Grob gesprochen nennt man zwei Objekte äquivalent, wenn sie sich in Bezug auf eine bestimmte Eigenschaft gleichen. Betrachten wir die Menge aller T-Shirts, so kann man sie farblich einteilen. Alternativ könnten wir sie auch in die Kategorien V-Ausschnitt, Rundkragen oder Sonstige einteilen. Verwenden wir die Farben-Eigenschaft, so nennen wir alle T-Shirts gleicher Farbe (z.B. gelb) äquivalent, egal welchen Ausschnitt, welche Marke oder welchen Aufdruck sie besitzen.

13.3.2 Beispiele

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\sim \subseteq \mathbb{R}^2$.
Es sei $x \sim y \iff |x| = |y|$.

Behauptung: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

Reflexivität: Wie wir wissen, gilt $|x| = |x|$, also gilt $x \sim x$.

Symmetrie: Wenn wir schon wissen, dass $|x| = |y|$, gilt natürlich auch $|y| = |x|$.
Also gilt: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Transitivität: Ebenso gilt wenn $|x| = |y|$ und $|y| = |z|$ auch schon $|x| = |z|$.
Damit gilt: $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

Alle 3 Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, somit ist die gegebene Relation eine Äquivalenzrelation. □

13.3.3 Gegenbeispiel

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ und $\sim \subseteq \mathbb{Q}^2$.
Es sei $x \sim y \iff 2x = y$ (vergleiche mit R_3 von oben).

Behauptung: $\sim$ ist keine Äquivalenzrelation.

Beweis: Um zu zeigen, dass $\sim$ keine Äquivalenzrelation ist, reicht es schon zu zeigen, dass die Relation $\sim$ eines der drei Kriterien verletzt. Und dazu muss man für das entsprechende Kriterium geeignete Elemente angeben, für die das Kriterium nicht erfüllt ist.
Für beispielsweise $x = 1$ ist $2 \cdot x = 2 \cdot 1 = 2 \neq 1 = x$, also $x \not\sim x$. Somit ist die Reflexivität verletzt und damit $\sim$ keine Äquivalenzrelation. □

Übung: Finde einen Widerspruch zu einer anderen Eigenschaft der Äquivalenzrelation.

13.3.4 Äquivalenzklassen

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $x \in M$ ein beliebiges Element. Dann nennt man die Menge $[x] := \{y \in M : x \sim y\} = \{y \in M : y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x.

Beispiele von Äquivalenzklassen zu obiger Äquivalenzrelation $x \sim y \iff |x| = |y|$:

- $[1] = \{1, -1\}$
- $\left[\frac{7}{3}\right] = \{\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\}$
- $[-23] = \{23, -23\}$
- $[0] = \{0\}$
- $[\sqrt{2}] = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Diese Liste könnte man unendlich fortsetzen.

Motivation

Wir wollen über einzelne Vertreter alle Elemente, die äquivalent dazu sind ansprechen. Zum Beispiel können wir, wenn wir eine Mitteilung an alle Klassensprecher geben, hiermit alle Schüler erreichen.

13.3.5 Übungen

1. Seien $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R_1, R_2, R_3, R_4 \subseteq M \times M$.
   a) Ist $R_1 := \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(1,3),(3,3),(4,4),(3,2),(3,1)\}$ eine Äquivalenzrelation?
   b) Ist $R_2 := \{(1,1),(2,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ eine Äquivalenzrelation?
   c) Ist $R_3 := \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ eine Äquivalenzrelation? (Vergleiche R_3 mit „=“ auf M!)
   d) Ist $R_4 := M \times M$ eine Äquivalenzrelation?

2. Sei $\sim \subseteq \mathbb{Z}^2$ mit $x \sim y \iff x - y$ ist gerade.
   Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation? Wenn ja, bestimme die Äquivalenzklassen.

13.4 Ordnungsrelation

13.4.1 Definition

Sei M eine nichtleere Menge und $\preceq \subseteq M^2$ eine Relation, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\forall x \in M : x \preceq x \qquad \text{(Reflexivität)}$$
$$\forall x, y \in M : x \preceq y \land y \preceq x \Rightarrow x = y \qquad \text{(Antisymmetrie)}$$
$$\forall x, y, z \in M : (x \preceq y \land y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z \qquad \text{(Transitivität)}$$

Man spricht dann von einer Ordnungsrelation. Man sagt auch $\preceq$ ist eine (partielle) Ordnung auf M oder $(M, \preceq)$ ist eine (partielle) Ordnung.
Gilt zusätzlich:

$$\forall x, y \in M : (x \preceq y) \lor (y \preceq x)$$

dann heißt $(M, \preceq)$ lineare (oder totale / vollständige) Ordnung.

13.4.2 Beispiele

1. Betrachte $M := \{1, 2, 3\}$, also $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

   Behauptung: $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine partielle Ordnung, die nicht linear ist.

   Beweis: Seien $X, Y, Z \in \mathcal{P}(M)$ beliebig.

   Reflexivität: Es gilt immer $X \subseteq X$.

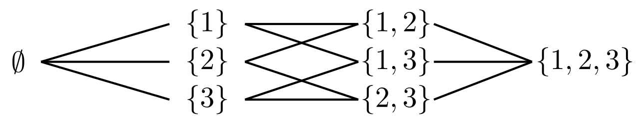
   Antisymmetrie: Wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$, dann gilt nach (2.7.5) $X = Y$. ✓

   Transitivität: Wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z$, dann ist auch $X \subseteq Z$.

   Linearität: Es ist $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ und $\{2\} \not\subseteq \{1\}$. Somit ist diese Bedingung nicht erfüllt.

   □

   Betrachten wir die graphische Veranschaulichung der nicht linearen Ordnung. Ein Strich deutet hierbei die Teilmengen-Relation jeweils von links nach rechts an, wenn das linke Element direkter Vorgänger des rechten Elements ist. (Dies ist eine nach rechts gekippte platzsparende Version eines sogenannten Hasse-Diagramms)



2. Betrachtet man die Relation $(\mathbb{N}, \leq)$, also das gewöhnliche $\leq$ auf den natürlichen Zahlen, ist direkt aus der Definition die lineare Ordnung abzulesen.

   Schauen wir uns auch hier einen Ausschnitt aus der graphischen Veranschaulichung der linearen Ordnung an. Ein Strich deutet hierbei die „kleiner gleich"-Relation an:

   $$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } 4 \text{ —— } 5 \text{ —— } \cdots$$

3. Wird das gewöhnliche $<$ auf den reellen Zahlen als Relation verwendet, so gilt die Reflexivität nicht mehr, da für kein $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < x$. Also ist $<$ keine Ordnungsrelation.

13.4.3 Einschub Teilbarkeit

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $x \mid y$ und sagen „x teilt y", wenn x ein Teiler von y ist, also falls gilt:

$$\exists n \in \mathbb{Z} : y = nx$$

Beispiele: $3 \mid 6,\ 4 \mid 64,\ 3 \nmid 2,\ 9 \nmid 3,\ 2 \mid -4,\ -2 \mid 4$

13.4.4 Übungen

Sei $\sim \subseteq \mathbb{N}^2$ mit $x \sim y \iff x \mid y$.
Zeige, dass mit $\sim$ eine Ordnungsrelation vorliegt, die nicht linear ist.

14 Algebra

Eine algebraische Struktur besteht aus einer nichtleeren Grundmenge, auf der eine oder mehrere Verknüpfungen definiert sind, die bestimmte Bedingungen erfüllen müssen.
Die Algebra erscheint am Anfang sehr abstrakt. Wir beschäftigen uns jedoch auch in der Informatik damit, da die gegebenen Strukturen immer wieder auftauchen.

14.1 Halbgruppen

14.1.1 Definition

Sei $H \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\circ : H \times H \to H : (x, y) \mapsto \circ(x, y)$$

eine Abbildung (in diesem Fall meist Verknüpfung genannt). Anstatt $\circ(x, y)$ schreiben wir einfacher $x \circ y$. Gilt für die Verknüpfung das Assoziativgesetz:

$$\forall x, y, z \in H : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

dann heißt $(H, \circ)$ Halbgruppe.

Bemerkung: Weil die Abbildung zwei Elemente aus H miteinander verknüpft und das Ergebnis wieder in H liegt, ist sie *abgeschlossen*.

14.1.2 Beispiele

1. $(\mathbb{N}, +)$
   Hier ist also $H = \mathbb{N}$ und $\circ = +$. Wenn wir zwei natürliche Zahlen miteinander addieren (also verknüpfen), ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Damit ist die Addition abgeschlossen. Auch das Assoziativgesetz $(k + m) + n = k + (m + n)$ ist für natürliche Zahlen aus der Schule schon bekannt.

2. $(\mathbb{N}_0, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}, +)$

3. $(\mathbb{N}, \cdot),\ (\mathbb{N}_0, \cdot),\ (\mathbb{Z}, \cdot),\ (\mathbb{Q}, \cdot),\ (\mathbb{R}, \cdot),\ (\mathbb{C}, \cdot)$

4. Sei M eine beliebige Menge. Dann ist auch $(\mathcal{P}(M), \cup)$ eine Halbgruppe:
   Hier ist also $H = \mathcal{P}(M)$ und $\circ = \cup$. Wenn wir zwei beliebige Teilmengen von M (also Elemente aus $\mathcal{P}(M)$) vereinigen, entsteht wieder eine Teilmenge von M, also ist $\mathcal{P}(M)$ unter $\cup$ abgeschlossen. Die Assoziativität haben wir in 2.8.2 gezeigt.
   Zur Verdeutlichung der Abgeschlossenheit schauen wir uns die Menge $M = \{1, 2\}$ als Beispiel an (<u>kein</u> Beweis, nur ein Beispiel!).

   Verknüpfungstafel:

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

5. $(\mathcal{P}(M), \cap)$
   Übung: Sei wieder $M = \{1, 2\}$. Zeige die Abgeschlossenheit des Schnittes mithilfe einer Verknüpfungstafel:

6. Sei M eine beliebige nichtleere Menge: $(\text{Abb}(M, M), \circ)$
   (Dabei bezeichnet für zwei Mengen M, N der Ausdruck $\text{Abb}(M, N)$ die Menge aller Abbildungen von M nach N und $\circ$ wie in 6.6 die Hintereinanderausführung von Abbildungen.)
   Betrachten wir zwei beliebige Abbildungen $f : M \to M$ und $g : M \to M$, so ist auch $f \circ g$ eine Abbildung von M nach M. Dadurch können also Abbildungen beliebig ineinander verschachtelt werden. Das Assoziativgesetz haben wir in 6.6.1 schon gezeigt.
   Zur Verdeutlichung der Abgeschlossenheit schauen wir uns die Menge aller Abbildungen für $M = \{1, 2\}$ an (wieder <u>kein</u> Beweis, sondern nur ein Beispiel!). Damit ist

$$\text{Abb}(M, M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   Übung: Berechne hierzu die Verknüpfungstafel.

14.1.3 Gegenbeispiele

1. **Behauptung:** $(\mathbb{N}, -)$ ist keine Halbgruppe.

   Beweis: Zum Beispiel ist $5 \in \mathbb{N}$ und $7 \in \mathbb{N}$, aber $5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N}$, somit ist $\mathbb{N}$ bezüglich $-$ nicht abgeschlossen, also keine Halbgruppe. Ebenso könnten wir die Assoziativität widerlegen: $10 - (5 - 2) = 10 - 3 = 7 \neq 3 = 5 - 2 = (10 - 5) - 2$. □

2. **Übung:** Zeige, dass $(\mathbb{Z}, \div)$ keine Halbgruppe ist.

3. $(\text{Abb}(M, N), \circ)$ mit $N \not\subseteq M$ ist keine Halbgruppe.
   Hierzu schauen wir uns das Beispiel $M = \{1, 2\},\ N = \{3, 4\}$ an (Beispiel, kein Beweis):

$$\text{Abb}(M, N) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Wählen wir dann $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Abb}(M, N)$ und $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Abb}(M, N)$ so sehen wir sofort, dass es nicht sinnvoll ist, über $f \circ g$ oder $g \circ f$ zu reden, da diese nicht definiert sind. Damit ist $\circ$ hier keine gültige Verknüpfung und somit $(\text{Abb}(M, N), \circ)$ keine Halbgruppe.

14.1.4 Kommutativität

Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ heißt kommutativ (also kommutative Halbgruppe), wenn die Verknüpfung kommutativ ist:

$$\forall x, y \in H : x \circ y = y \circ x$$

14.1.5 Beispiele

1. $(\mathbb{N}, +),\ (\mathbb{N}_0, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}, +)$

2. $(\mathbb{N}, \cdot),\ (\mathbb{N}_0, \cdot),\ (\mathbb{Z}, \cdot),\ (\mathbb{Q}, \cdot),\ (\mathbb{R}, \cdot),\ (\mathbb{C}, \cdot)$

3. $(\mathcal{P}(M), \cup),\ (\mathcal{P}(M), \cap)$

4. $(\text{Abb}(M, M), \circ)$ ist *nicht* kommutativ (siehe 6.6.2).

14.1.6 Homomorphismus

Seien $(H, \circ_H)$ und $(K, \circ_K)$ Halbgruppen.
Eine Abbildung $\varphi : H \to K$ heißt Homomorphismus, wenn gilt:

$$\forall x, y \in H : \varphi(x \circ_H y) = \varphi(x) \circ_K \varphi(y)$$

14.1.7 Beispiele

1. **Behauptung:** $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$ ist ein Homomorphismus zwischen den Halbgruppen $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$.

   Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig.
   Dann gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ (wie wir schon in 3.8.3 gesehen haben) $\square$

2. **Behauptung:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x$ ist ein Homomorphismus zwischen den Halbgruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$.

   Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.
   Es gilt: $f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$ $\square$

3. **Behauptung:** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$ ist *kein* Homomorphismus zwischen den Halbgruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$.

   Beweis: Betrachte: $g(2 + 3) = g(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
   Aber: $g(2) + g(3) = (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) = 8 + 11 = 19$
   Damit ist $g(2 + 3) \neq g(2) + g(3)$. $\square$

14.2 Monoide

14.2.1 Definition

Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ in der es ein Element e gibt, für das gilt:

$$\forall x \in H : e \circ x = x = x \circ e$$

heißt Monoid. Das Element e wird neutrales Element oder Neutralelement genannt. Wir schreiben das Monoid als $(H, \circ, e)$.

14.2.2 Beispiele

1. $(\mathbb{N}_0, +, 0)$
   In 14.1.2 haben wir schon gesehen, dass $(\mathbb{N}_0, +)$ eine Halbgruppe ist. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 + n = n$. Da $+$ in $\mathbb{N}_0$ kommutativ ist, gilt auch $n + 0 = n$. Damit ist $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ein (kommutatives) Monoid.

2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{C}, +, 0)$

3. $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{N}_0, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$

4. $(\mathcal{P}(M), \cup, \emptyset)$, $(\mathcal{P}(M), \cap, M)$

5. $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ, \mathrm{id})$
   In 14.1.2 haben wir schon gesehen, dass $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ)$ eine Halbgruppe ist. Weil für alle $f \in \mathrm{Abb}(M, M)$ und ein beliebiges $x \in M$ schon $(\mathrm{id} \circ f)(x) = \mathrm{id}(f(x)) = f(x)$ und $(f \circ \mathrm{id})(x) = f(\mathrm{id}(x)) = f(x)$ gilt, ist auch $\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$.

6. $(\mathbb{N}, +)$ ist *kein* Monoid.
   Wir finden keine natürliche Zahl $e \in \mathbb{N}$, so dass $e + n = n = n + e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

14.2.3 Eindeutigkeit des Neutralelements

Behauptung: Das Neutralelement eines Monoids ist eindeutig.

Beweis: Sei $(H, \circ)$ eine Halbgruppe. Es gebe Elemente $e_1, e_2 \in H$ mit

$$\forall x \in H : e_1 \circ x = x = x \circ e_1 \quad \text{und} \tag{1}$$
$$\forall x \in H : e_2 \circ x = x = x \circ e_2 \tag{2}$$

Dann folgt aus $e_1 \overset{(2)}{=} e_1 \circ e_2 \overset{(1)}{=} e_2$ direkt die Eindeutigkeit. □

14.3 Gruppen

14.3.1 Definition

Ein Monoid $(H, \circ, e)$, für das gilt:

$$\forall x \in H : \exists y \in H : x \circ y = e = y \circ x$$

heißt Gruppe.
Das zu x inverse Element y wird meist mit x^{-1} bezeichnet.

14.3.2 Beispiele

1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$
   In 14.2.2 haben wir schon gesehen, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ein Monoid ist. Betrachten wir eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $n + (-n) = 0 = (-n) + n$. Also ist $-n$ das zu n inverse Element und damit $(\mathbb{Z}, +, 0)$ eine Gruppe.

2. $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{C}, +, 0)$ sind Gruppen, jedoch ist $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ *keine* Gruppe.

3. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$
   Wir müssen hier 0 aus $\mathbb{Q}$ herausnehmen, da kein $y \in \mathbb{Q}$ existiert, für das $0 \cdot y = 1$ und $y \cdot 0 = 1$ gilt.
   Klar: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist ein Monoid. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ und $\frac{1}{x} \cdot x = 1$, also ist $\frac{1}{x}$ das Inverse zu x. Damit ist $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe.

4. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind Gruppen, jedoch sind $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ *keine* Gruppen und auch $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ nicht (es gibt zum Beispiel kein inverses Element zu 2).

5. $(\mathrm{Bij}(M, M), \circ, \mathrm{id})$
   (Dabei bezeichnet $\mathrm{Bij}(M, N)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach N.)
   In 14.2.2 haben wir schon gesehen, dass $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ, \mathrm{id})$, also insbesondere auch $(\mathrm{Bij}(M, M), \circ, \mathrm{id})$ ein Monoid ist. In 6.7 haben wir gesehen, dass jede bijektive Abbildung f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt, für die gilt: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$. Damit ist die Umkehrabbildung die inverse Abbildung. Also ist $(\mathrm{Bij}(M, M), \circ, \mathrm{id})$ eine Gruppe.
   Da nicht bijektive Abbildungen keine Umkehrabbildung besitzen, ist $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ, \mathrm{id})$ jedoch *keine* Gruppe.

6. Da bei $(\mathcal{P}(M), \cup, \emptyset)$ das neutrale Element die leere Menge ist und wir durch die Vereinigung die Menge nur vergrößern können, ist $(\mathcal{P}(M), \cup, \emptyset)$ *keine* Gruppe. Umgekehrt verkleinert bei $(\mathcal{P}(M), \cap, M)$ der Schnitt immer die Menge, obwohl das neutrale Element die gesamte Menge M ist. Also ist auch $(\mathcal{P}(M), \cap, M)$ *keine* Gruppe.

14.3.3 Eindeutigkeit des inversen Elements

Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe und $x \in G$ beliebig.

Behauptung: Das zu x inverse Element ist eindeutig.

Beweis: Es gebe Elemente $x_1, x_2 \in G$ mit

$$x \circ x_1 = x_1 \circ x = e \quad \text{und} \tag{1}$$
$$x \circ x_2 = x_2 \circ x = e \tag{2}$$

Dann folgt aus $x_1 = x_1 \circ e \overset{(2)}{=} x_1 \circ (x \circ x_2) = (x_1 \circ x) \circ x_2 \overset{(1)}{=} e \circ x_2 = x_2$ direkt die Eindeutigkeit. □

Eben aus diesem Grund schreibt man für das zu x inverse Element meist x^{-1}.

14.3.4 Abelsche Gruppe

Eine Gruppe, in der die Verknüpfung kommutativ ist, heißt kommutative oder auch abelsche Gruppe.

14.3.5 Beispiele

1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{C}, +, 0)$
2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$

14.3.6 Eigenschaften des Gruppenhomomorphismus

Behauptung: Seien $(H, \circ_H, e_H)$ und $(K, \circ_K, e_K)$ Gruppen, $\varphi : H \to K$ ein Homomorphismus und $x \in H$ beliebig. Dann gilt:

1. $\varphi(e_H) = e_K$
2. $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

Beweis:

1. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_H) &= \varphi(e_H) \circ_K e_K \\
&= \varphi(e_H) \circ_K \varphi(e_H) \circ_K (\varphi(e_H))^{-1} \\
&= \varphi(e_H \circ_H e_H) \circ_K (\varphi(e_H))^{-1} \\
&= \varphi(e_H) \circ_K (\varphi(e_H))^{-1} \\
&= e_K
\end{aligned}$$

2. Um zu überprüfen, dass ein Element g einer beliebigen Gruppe $(G, \circ, e)$ als inverses Element g^{-1} besitzt, muss $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$ gelten:

$$\varphi(x) \circ_K \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \circ_H x^{-1}) = \varphi(e_H) = e_K$$

$$\varphi(x^{-1}) \circ_K \varphi(x) = \varphi(x^{-1} \circ_H x) = \varphi(e_H) = e_K$$

Wir haben also ein Element $\varphi(x^{-1})$ gefunden, das wir sowohl von links, als auch von rechts mit $\varphi(x)$ verknüpfen können, so dass e_K herauskommt.
Damit gilt $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

□

14.4 Übungen

1. Ist $(\{-1, +1\}, \cdot, +1)$ eine abelsche Gruppe?
2. Ist $(\{0, 1\}, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe?

15 Lineare Gleichungssysteme

Wir verzichten hier auf die Theorie und führen an einigen Beispielen die Vorgehensweise zur Lösung linearer Gleichungssysteme vor. An diesen Beispielen sollte das allgemeine Vorgehen recht gut klar werden.

15.1 Beispiele

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 11x_2 - 13x_3 &= -17 \\ 25x_3 &= 75 \end{aligned}$$

Nun wollen wir x_1, x_2 und x_3 so bestimmen, dass das Gleichungssystem erfüllt ist.
Dazu lösen wir von der dritten Zeile beginnend auf:

$$25x_3 = 75 \iff x_3 = \frac{75}{25} = 3$$

Dieses Ergebnis von x_3 setzen wir nun in der zweiten Zeile ein:

$$\begin{aligned} 11x_2 - 13x_3 = -17 &\iff 11x_2 - 13 \cdot 3 = -17 \\ &\iff 11x_2 - 39 = -17 \\ &\iff 11x_2 = 22 \\ &\iff x_2 = 2 \end{aligned}$$

Und nun setzen wir x_2 und x_3 in der ersten Zeile ein:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 &\iff 5x_1 - 2 \cdot 2 + 3 = 4 \\ &\iff 5x_1 - 1 = 4 \\ &\iff 5x_1 = 5 \\ &\iff x_1 = 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösungsmenge also $L = \{(1, 2, 3)\}$

Um das Ergebnis zu überprüfen, ist es äußerst empfehlenswert, die Probe zu machen!

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 &= 4 \\ 11 \cdot 2 - 13 \cdot 3 &= -17 \\ 25 \cdot 3 &= 75 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Wir übersetzen dies nun in eine Matrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$

Mit Matrizen lassen sich nun folgende Äquivalenzumformungen durchführen:

1. Zeilen vertauschen
2. Multiplizieren einer Zeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl
3. Ersetzen einer Zeile durch die Summe aus dieser und einer anderen Zeile

Wir versuchen nun eine Stufenform in die Matrix zu bekommen. Wir lassen also die erste Zeile stehen und versuchen in allen weiteren Zeilen eine 0 in der ersten Spalte zu bekommen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -13 & -17 \\ 0 & 11 & 12 & 58 \end{array}\right)$$

Nun führen wir dieses Schema fort, lassen also die ersten zwei Zeilen unverändert und versuchen in allen weiteren Zeilen eine 0 in den ersten zwei Spalten zu bekommen, usw.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & -13 & -17 \\ 0 & 0 & 25 & 75 \end{array}\right)$$

Wir haben also die Stufenform erreicht und schreiben die Matrix nun wieder als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 11x_2 - 13x_3 &= -17 \\ 25x_3 &= 75 \end{aligned}$$

Nun lösen wir dieses wie in Beispiel 1 durch Rückwärtseinsetzen.

Beispiel 3

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 & -2 \end{array}\right)$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1 und vertauschen dann die zweite und dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 1x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_2 + 11x_3 &= 2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow L = \{(3, -4, 2)\}$
Probe!

Beispiel 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{array}\right)$$

Weil $0x_3 = 40$ für kein $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, ist die Lösungsmenge $L = \emptyset$.

Beispiel 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 1 & -4 \\ 0 & 10 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können hier aufgrund der Nullzeile eine Variable frei wählen. Wir setzen: $x_3 = t$. Nun können wir x_2 mithilfe von t ausdrücken:

$$\begin{aligned} -10x_2 + x_3 = -4 &\iff -10x_2 + t = -4 \\ &\iff -10x_2 = -4 - t \\ &\iff x_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}t \end{aligned}$$

Ebenso drücken wir nun x_1 mit t aus:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 &\iff 3x_1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}t\right) + t = 1 \\ &\iff 3x_1 - \frac{2}{5} + \frac{9}{10}t = 1 \\ &\iff 3x_1 = \frac{7}{5} - \frac{9}{10}t \\ &\iff x_1 = \frac{7}{15} - \frac{3}{10}t \end{aligned}$$

$\Rightarrow L = \left\{\left(\tfrac{7}{15} - \tfrac{3}{10}t,\ \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{10}t,\ t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$
Probe!

15.2 Zusammenfassung der drei möglichen Fälle

Für ein lineares Gleichungssystem tritt also einer der folgenden Fälle ein. Das Gleichungssystem ist

- eindeutig lösbar.

  Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- nicht lösbar.

  Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{array}\right)$$

- lösbar mit unendlich vielen Lösungen.

  Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$