# Stochastik für Informatiker und Bioinformatiker

Prof. E. Teufl[1]

Sommersemester 2010

Stand: 1. Juni 2010 16:59

[1]Mitschrift: Volodymyr Piven, Alexander Peltzer, Korrektur: Demen Güler, Sebastian Nagel

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Beim vorliegenden Text handelt es sich um eine inoffizielle Mitschrift. Als solche kann sie selbstverständlich Fehler enthalten und ist daher für Übungsblätter und Klausuren nicht zitierfähig.

Korrekturen und Verbesserungsvorschläge sind jederzeit willkommen und können an wpiven@gmail.com oder alex.peltzer@gmail.com gerichtet werden.

Der Text wurde mit LaTeX2e in Verbindung mit dem AMS-TeX-Paket für die mathematischen Formeln gesetzt.

# Kapitel 0

# Einleitung

Dozent:

- Professor Dr. Elmar Teufl
  Phone: +49 7071 29 78582 Email: elmar.teufl@uni-tuebingen.de

Vorlesungszeiten:

- Dienstag 16-18 Uhr Hörsaalzentrum N9

Übungsleitung;

- Hadrian Heil

- http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/ teufl/StochBioInf/

- Übungsmodus: Mittleres Ergebnis in Prozent ≥ 50%

- Schlechtestes Ergebnis wird vor der Mitteilung gestrichen, 1. Übungsblatt ist Bonus.

- 2maliges Vorrechnen in der Übungsgruppe ist Pflicht.

- Klausur: letzte Vorlesungswoche + Nachklausur: Vor Beginn des Wintersemesters.

Literatur:

- U. Krengel: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

- H.-O. Georgii: Stochastik

# Kapitel 1

# Vorlesung

3 Teile

- Wahrscheinlichkeitstheorie (W! theorie) im endlichen und abzählbaren Fall
- W!theorie im kontinuierlichen Fall ($\mathbb{R}$)
- Statistik

Stochastik ? : gr. $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\iota\kappa o\varsigma$ = scharfsinnig im Vermuten
Gesetzmäßigkeiten im Zufall

Wahrscheinlichkeit Zufall:

- Glückspiel: Würfelspiel, Lotto ...
- Natur: Meßergebnisse, Lebensdauer, ...
- Wirtschaft: Aktienkurse, ...
- Informatik: randomisierte Algorithmen, ...

**Beispiel (Würfel)** • W! definiert via relative Häufigkeiten: Würfel wird 6 Millionen mal geworfen
Etwa 1 Million Ergebnisse sind davon "1"

- Modell des "realen" Würfels: Der Würfel ist fair/ideal. Jede Augenzahl (AZ) ist gleich wahrscheinlich. Eventuell ist das Modell nicht geeignet, die Annahmen im Modell falsch. Wahrscheinlichkeiten sind "a priori" bekannt. Dieser Zugang geht auf A.N. Kolmogorov zurück.

# §1 Wahrscheinlichkeitsräume

**Beispiel (Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum)** • $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$) Grundraum, Elemente in $\Omega$ sind Elementarereignisse.

- Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse sind gleich groß
  $P : \mathbb{P}(\Omega) \to [0, 1]$ (probability) mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$
  $\mathbb{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \Omega\} = \{A \subseteq \Omega\}$
  Inbesondere $A = \{\omega\} \subseteq \Omega : P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = P(\omega), P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
  $(\Omega, P)$ heißt Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum. P heißt Gleichverteilung auf $\Omega$

  - Bsp: Würfel: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, P(\omega) = \frac{1}{6}$

  - Bsp: Münzwurf: $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\}, P(Kopf) = P(Zahl) = \frac{1}{2}$ (Im Idealfall)

  ad Würfel: Einige Ereignisse: $A$ = gerade Augenzahl $= \{2, 4, 6\}$
  $B$ = Augenzahl $\geq 4 = \{4, 5, 6\}$
  "gerade AZ" und "AZ $\geq$ 4" $= \{4, 6\} = A \cap B$
  "gerade AZ" oder "AZ $\geq$ 4" $= \{2, 4, 5, 6\} = A \cup B$

- Notation: [ AZ gerade ] $= \{2, 4, 6\}$
  $P$(AZ gerade) $= P$[AZ gerade]

- $\frac{|A\cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A\cap B|}{|\Omega|} =$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Insbesondere $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Beispiel** Zweimaliger Wurf eines (fairen) Würfels.
$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 6)\} = \{1, 2, \ldots, 6\}x\{1, 2, \ldots, 6\} = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$
(Grundraum) $|\Omega| = 6^2 = 36$
Alle Elementaren Ereignisse sollen gleich wahrscheinlich sein, das heißt
$P : \mathbb{P}(\Omega) \to [0, 1] istdurch P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ gegeben. (Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum)
[ bei beiden Würfen keine 6 ] $= \{(1, 1), \ldots, (1, 5), (2, 1), \ldots, (2, 5), \ldots, (5, 5)\} = \{1, 2, \ldots 5\}^2 P[$ bei beiden Würfen keine 6 ] $= 5^2 = 25$
$P$[bei beiden Würfen keine 6] $= \frac{25}{36}$
[ Eine AZ 6 und eine weitere gerade Augenzahl ] $= \{(2, 6), (4, 6), (6, 6), (6, 4), (6, 2)\}$
$P$[ bei beiden Würfen keine 6 ] ist hiermit: $\frac{5}{36}$

**Beispiel** Sei $A$ = [mind eine AZ 6], $B$ = [zwei gerade AZ]
$|A| = 11, |B| = 9$ (aufzählen!)
$\Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}, P(B) = \frac{9}{36}, P(A \cap B) = P$[Eine AZ 6 und eine weitere gerade AZ] $= \frac{5}{36}$

**Beispiel** $P$[Eine AZ 6 oder zwei gerade AZ] $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} + \frac{9}{36} - \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
Also: Rechnen mit Mengen wichtig ! ($A \cup B, A \cap B, \overline{A} = \Omega \backslash A$ Komplement)
Interpretation von $\cap, \cup$ in Worten!

Axiome:
Definition : $\omega \neq \emptyset$ Grundraum mit Elementarereignissen
$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ Familie von Teilmengen von $\Omega$ mit:

(A) $\omega \in \mathbb{F}$

(B) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$

(C) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{F}$, dann ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$
(Ebenso ist wegen (AZ) auch $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$)

**1.1 Bemerkung** $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x : \ \exists n \in \mathbb{N} \ x \in A_n\}$
$\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x : \ \forall n \in \mathbb{N} \ x \in A_n\}$

$\mathcal{F}$ heißt $\sigma$- Algebra.
s Elemente in $\mathcal{F}$ heißen Ereignisse.
Sei $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ eine Funktion mit:

(P) $P(\Omega) = 1$

(P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_1 \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

(Konvergenz)

$P$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum
Beispiel: $(\Omega, P)$ Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum, dann ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum
Bemerkung: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist; $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:
$(\Omega, P)$ Laplace-Raum mit $|\Omega| = n$ Elementen
$A, B \leq \Omega$ mit $|A| = k, |B| = l$
$P(A) = \frac{k}{n}, \ P(B) = \frac{l}{n}$

Außerdem $|A \cap B| = m$, das heißt $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$
Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A ist:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{m}{k} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

$(k \neq 0, P(A) \neq 0)$
Interpretation: $P(B \mid A)$ ist die Wahrscheinlichkei, dass B eintritt unter der Voraussetzung , dass A schon eingetreten ist.

**1.2 Definition** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$, dann setzen wir $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

**1.3 Bemerkung** Sei $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\, P(A) = P(A \mid B)\, P(B)$$

**Beispiel (Würfeln)** $\Omega = \{1, .., 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
$A = [AZ \geq 2], B = [\text{AZ ungerade}]$
$P(A) = \frac{5}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = P(A \cap B) &= P(A|B)\, P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \checkmark \\ &= P(A|B)\, P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \checkmark \end{aligned}$$

Sei $A \in \mathcal{F}$ $(\overline{A} = \Omega \setminus A)$ und $B \in \mathcal{F}$ dann gilt:
$A$ und $\overline{A}$ sind disjunkt $\left(A \cap \overline{A} = \emptyset\right)$
$B \cap A$ und $B \cap \overline{A}$ sind disjunkt.
$(B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = B \cap \Omega = B$
$P(B) = P\left((B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right) = P\,(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$
<u>Satz von der totalen W!</u>

**1.4 Satz**
*$A_n \in \mathcal{F}$ (endl. oder abzählbar viele) mit $\bigcup_n A_n = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkt), dann gilt:*

$$B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n)$$

*„Satz von der totalen W!“*
***Folgerung:*** *Voraussetzungen wie vorhin. Zusätzlich soll gelten: $P(A) > 0$ für alle $n$ und $P(B) > 0$. Dann gilt $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_n P(B|A_n)(P(A_n)}$ „Formel von Bayes“*

# §2 Unabhängigkeit

**2.1 Definition** $A, B \in \mathcal{F}$ heißen (stochastisch) unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**2.2 Bemerkung** Sei $A, B \in \mathcal{F}$ und $P(B) > 0$ und $A, B$ unabh.
$\Rightarrow \; P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$
Umgekehrt: Seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$ und $P(A|B) = P(A)$, dann sind $A, B$ unabh.

**Beispiel** $2 \times$ Würfel: $\Omega = \{1, .., 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. $\quad \left(|\Omega| = 6^2 = 36\right)$
$A = [AZ = 1 \text{ beim 1. Wurf }] = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$
$B = [AZ \text{ gerade beim 2. Wurf }] = \{(1,2), (2,2), \ldots, (6,2), (1,4), \ldots, (6,4), (1,6), \ldots, (6,6)\}$
$|A| = 6, \; |B| = 3 \cdot 6 = 18$
$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \; P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
$A \cap B = \{(1,2), (1,4), (1,6)\}, \; |A \cap B| = 3$
$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$
$P(A) = \frac{1}{6}$, also sind $A$ und $B$ unabh.

# §3 Diskrete W!räume

**3.1 Definition** $\Omega$ endl. oder abz.
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ Potenzmenge von $\Omega$
$P$ ein W!maß auf $\Omega, \mathcal{F}$
Dann $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ diskreter W!raum

**3.2 Bemerkung** Sei $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$, dann genügt es $P(\{w_k\}) = P(w_k)$ für alle $k$ anzugeben, um das W!maß $P$ zu beschreiben, da $P(A) = \sum_{w \in A} P(w)$ gilt.

**3.3 Bemerkung** $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots\}$ endlich oder abzählbar, dann genügt $P(w) = P(\{w\})$ festzulegen, um das W!maß P zu beschreiben, da

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(w)$$

**Beispiel** "unfaire Münze": $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
$P(\text{Kopf}) = \frac{1}{3}, P(\text{Kopf}) = \frac{2}{3}$

**Beispiel** $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $P(k) = \frac{1}{2^k}$
(sinnvoll, da $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1$ )

$$P(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k}$$

**3.4 Definition** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar. $\exists = \mathcal{P}(\Omega)$
Die Abbildung $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$F(x) := P(\Omega \cup (-\infty, x])$$

heißt Verteilungsfunktion von $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Beispiel** $\Omega = \{0, 1\}$, $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ ($\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$) Die Sprünge im Schaubild sind genau die Stellen, an denen Elementarereignisse eintreten. Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind hier genau die Höhe der Sprunghöhe. Bei 1 ist das: $P(\{0, 1\} \cup (-\infty, 1]) = P(\{0, 1\}) = 1$;
Bei 0 ist das: $P(\{0, 1\} \cup (-\infty, 0]) = P(0) = \frac{1}{2}$

# §4 Eine $\sigma$ - Algebra auf $\mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist "groß". Minimalansatz: Wir suchen die kleinste $\Sigma$-Algebra, die alle Intervalle enthält.

**4.1 Definition** Die Borel'sche $\Sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste $\Sigma$- Algebra auf $\mathbb{R}$ , die alle Intervalle enthält, also Teilmengen von $\mathbb{R}$ der Form $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$, $(-\infty, b], (-\infty, b), [a, +\infty), (a, +\infty)$
Es genügt hier folgende Intervalle zu betrachten:

$$(-\infty, x]$$

für $x \in \mathbb{R}$.

**4.2 Definition** $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ ein W!maß. Die Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

ist

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

# §5 Zufallsvariable

**Beispiel** 2x Wurf eines Würfels: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Augensumme (AS) = Summe der beiden Augenzahlen.

$$[AS = 1] = \emptyset, [AS = 2] = \{(1, 1)\},$$
$$[AS = 3] = \{(1, 2), (2, 1)\}, [AS = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \ldots$$

Formel: AS: $\Omega \to \mathbb{N}$ (oder $\{2, 3, 4, \ldots, 123)$ mit AS$(i, j) = i + j$
$[AS = k] = \{(i, j) \in \Omega : AS(i, j) = k\} = \mathrm{AS}^{-1}(\{k\})$

**Beispiel** $W_1 : \Omega \to \mathbb{N}$ oder $\{1, 2, \ldots, 6\}$ mit $W_1(i, j) = i$
$W_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ mit $W_2(i, j) = j$
$\Rightarrow \underset{i+j}{\mathrm{AS}} = \underset{i}{W_1} + \underset{j}{W_2}$

**5.1 Definition** Sei $\Omega$ ein grundraum und $\mathcal{F}$ eine $\Sigma$-Algebra über $\Omega$, $Z$ eine Menge und $\mathcal{Z}$ eine $\Sigma$-Algebra über $Z$.
Eine Abbildung

$$X : \Omega \to Z$$

heißt Zufallsvariable (ZV), wenn für alle $B \in \mathcal{Z}$ gilt:

$$[X \in B] \underset{\in \mathcal{F}}{=} \{w \in \Omega : X(w) \in B\}$$

**5.2 Bemerkung**

- Wenn $Z$ endlich oder abzählbar und $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$ ist, dann ist

$$X : \Omega \to Z$$

eine Zufallsvariable, wenn $[X = x] \in \mathcal{F}$ für alle $x \in Z$ gilt. Wenn auch $\Omega$ endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Abbildung

$$X : \Omega \to Z$$

eine Zufallsvariable.

- $Z = \mathbb{R}, \mathcal{Z} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann eine Zufallsvariable, wenn

$$[X \in (-\infty, x]] = [X \leq x] \in F$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**5.3 Definition** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!raum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$
$A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$$

**5.4 Definition** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!raum, für $i = 1, \ldots, n$ sei $Z_i$ Menge und $\mathcal{Z}_i$ $\Sigma$-Algebra auf $Z$, und sei für $i = 1, \ldots, n$ $X_i : \Omega \to Z_i$ eine Zufallsvariable. Die Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, falls

$$P[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n] = P([X_1 \in B_1] \cup \ldots \cup [X_n \in B_n]) = P[X_1 \in B_1] \cdots P[X_n \in B_n]$$

für alle $B_1 \in \mathcal{Z}_1, B_2 \in \mathcal{Z}_2, \ldots, B_n \in \mathcal{Z}_n$ gilt.

**5.5 Bemerkung**

- Alle $Z_i$ sind endlich oder abzählbar, $\mathcal{Z}_i = \mathcal{P}(Z_i)$
$X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_n = x_n]$$

für alle $x_1 \in Z_1, \ldots, x_n \in Z_n$

- $Z_i = \mathbb{R}$ und $\mathcal{Z}_i = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn
$$P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = P[X_1 \leq x_1] \cdots P[X_n \leq x_n]$$
für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Aus Alt mach Neu

1. Bedingungen: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!raum und $B \in F$ mit $P(B) > 0$. Setze
$$P_B(A) := P(A \mid B)$$
Dann ist $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ ein W!raum.
2. Produkte : Für $i = 1, 2, \ldots, n$ sei $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ein diskreter W!raum gegeben. ($F_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$)
Setze: $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
Das W!maß $P$ auf $\Omega$ wird druch $P(w_1, w_2, \ldots, w_n = P_1(w_1)P_2(w_2) \cdots P_n(w_n)$
für $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \Omega$ festgelegt.

**Beispiel** Wie in den Übungen: $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ W!raum zum Münzwurf.
($\Omega_1 = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}, F_1 = \mathcal{P}(\Omega_1), P_1(\text{Kopf}) = P_1(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$)
$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ W!raum zum Wurf eines Würfels: $\Omega_2 = \{1, 2, \ldots, 6\}, F_2 = \mathcal{P}(\Omega_2), P_2(i) = \frac{1}{6}$
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\text{Kopf}, 1), (\text{Kopf}, 2), \ldots, (\text{Kopf}, 6), (\text{Zahl}, 1), \ldots, (\text{Zahl}, 6)\}$
$P((\text{Kopf}, 1)) = P_1(\text{Kopf}) \cdot P_2(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$,
$P((x, i)) = \frac{1}{12}$ immer (x=Kopf, Zahl; $i = 1, 2, \ldots, 6$)

n-fache (unabhängige) Wiederholung: $\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n$, $P_1 = P_2 = \ldots = P_n$

3. Verteilung einer Zufallsvariablen: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein W!raum und $Z$ Menge, $\mathcal{Z}$ $\Sigma$-Algebra über $Z$.
$X : \Omega \to Z$ sei Zufallsvariable, als $[Z \in B] \in \mathcal{F}$ für alle $B \in \mathcal{Z}$.
Setze: $P_x(B) := P[X \in B]$, dann ist $(Z, \mathcal{Z}, P_x)$ ein W!raum und heißt Verteilung von $X$.

**Beispiel** $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
$S : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ mit $S(i, j) = i + j$
$P_s$? ($Z = \{2, 3, \ldots, 12\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$)
$P[s = 2] = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}, P[s = 3] = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$,
$P[s = 4] = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}, \ldots$
$P[s = 7] = \frac{6}{36}, P[s = 8] = \frac{5}{36}, \ldots, P[s = 12] = \frac{1}{36}$

| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_s(k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Neuer W!raum: $(\{2, 3, \ldots, 12\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, 12\}), P_5)$

**5.6 Bemerkung** Sei $(\Omega, \underbrace{\mathcal{F}}_{=\mathcal{P}(\Omega)}, P)$ diskreter W!raum und $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_n)$ die n-fache Wiederholung und $X_i : \Omega^n \to \Omega$ mit $X_i(w_1, \ldots, w_n) = w_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, dann sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig.

**5.7 Definition** ad 3.) "Verteilung von ZV"
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!raum und $X : \Omega \to Z$, ZV, wobei $Z \subseteq \mathbb{R}$ entweder endlich / abzählbar mit $\sigma = \mathcal{P}(Z)$ oder $Z = \mathbb{R}$ mit $\sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Dann sei $F_x$ die Verteilungsfunktion von $P_x$:

$$P_x(B) = P[X \in \mathbb{B}] \text{ und}$$
$$F_x : \mathbb{R} \to [0,1] \text{ mit } F_x(x) = P[X \leq x]$$

$F_x$ heißt dann auch Verteilungsfunktion von $X$.

**Beispiel** Erwartungswerte und Co.
Adam und Eva spielen folgendes Würfelspiel: Adam wirft einen fairen Würfel.

Bei AZ $= 1, 2$ muß Adam 1 Euro an Eva zahlen.

Bei AZ $= 3, 4, 5, 6$ wird der Würfel erneut geworfen.

Bei AZ $= 1, 2$ Adam an Eva 1 Euro.

Bei AZ $= 3, 4, 5, 6$ Eva an Adam 1 Euro.

Modell: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ (zweimaliger Wurf)
$X : \Omega \to \{1, \underbrace{-1}_{\text{Verlust}}\}$ Gewinn von Adam
$P[X = -1] = P(\{\{1,2\} \times \{1, 2, \ldots, 6\} \underset{\text{disjunkt}}{\cup} \{3,4,5,6\} \times \{1,2\}) = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2}{36} = \frac{5}{9}$
$P[X = 1] = 1 - P[X = -1] = P(\{3,4,5,6\} \times \{3,4,5,6\}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Erwarteter Gewinn:
$$(-1) \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{1}{9}\text{Euro}$$

**5.8 Definition** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!Raum, $Z \subseteq \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar, mit $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$.
Eine ZV $X : \Omega \to Z$ heißt (reellwertige), diskrete Zufallsvariable.
Sei $X$ eine (reelwertige) diskrete ZV. Der Erwartungswert ist

$$E(X) = \sum_{x, x \in \mathbb{Z}} x P[X = x]$$

sofern die Summe absolut konvergiert.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann sei
$$E(f(x)) = \sum_x f(x) P[X = x]$$
sofern die Summe absolut konvergiert.
Für $f(x) = x^n$ heißt
$$E(x^n) = \sum_x x^n P[X = x]$$

das n-te Moment von $X$ sofern die Summe absolut konvergiert.
Wir sagen, $X$ hat endlich n-tes Moment oder das n-te Moment von $X$ existiert, wenn $\sum\limits_x x^n P[X = x]$ absolut konvergiert.
(kurz $E(X^n) < \infty$)

Falls $\mu = E(X)$ endlich, dann ist die Varianz von X:

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 P[X = x]$$

sofern die Summe absolut konvergiert.
Die Standardabweichung ist $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

**5.9 Satz (Rechenregeln)**
*$X, Y$ (reelle) diskrete Zufallsvariablen. $a, b, \in \mathbb{R}$*

*1)* $E(aX + b) = aE(X) + b$
$M := aX + b$; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to Z \subseteq \mathbb{R} \\ M : \Omega &\to \{ax + bx \in Z\} \\ w &\mapsto aX(w) + b \end{aligned}$$

$E(M) = \sum\limits_{m\in\{ax+b:x\in\mathbb{Z}\} mP[M=m]=\sum\limits_x \in\mathbb{Z}} (ax + b)P[X = x] =$
$a \sum\limits_x xP[X = x] + b \sum\limits_x P[X = x]$

*2)* $S = \underset{Z_x}{X} + \underset{Z_y}{Y} : \Omega \to \{x + y_x \in Z_x, y \in Z_y\}$
$\underbrace{E(X + Y) = E(S)}_{\sum\limits_{x\in Z_x, y\in Z_y} (x+y)P[X+Y=x+y] = \sum\limits_{s\in\{x+y:x\in Z_x, y\in Z_y\}} sP[S=s]} = E(X) + E(Y)$

*3) Verschiebesatz:* $\mu = E(X)$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X - \mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - E(-2\mu X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

**5.10 Bemerkung** $X = c$ konstante ZV, d.h. $X(w) = c$ für alle $w \in \Omega$.
$\Rightarrow E(X) = E(c) = c$

**Beispiel** Für $E(X) = \infty$, $X : \Omega \to \mathbb{N}$ mit

$$P[X = n] = \frac{1}{n(n+1)}$$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 \ldots$
$E(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nP[X = n] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}(n+1)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$

**5.11 Bemerkung (Rechenregeln für die Varianz)** 1) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
Satz: $X, Y$ reellwertige + diskrete ZV und $X, Y$ unabhängig:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

**Beispiel** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W!Raum, $Z \in \mathbb{R}$ endlich/abzählbar, $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$
$X : \Omega \to Z$ eine (reellwertige) diskrete Zufallsvariable.
$P_X(B) = P[X \in B]$ Verteilung von $X$ (W!maß auf $(Z, \mathcal{Z})$
Schreibweise:

$$\underline{X \sim P_x}$$

a) Bernoulli-Verteilung: $p \in (0, 1)$
$Z = \{0, 1\}, \mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z), P_X \underset{\text{Misserfolg}}{(0)} = 1 - p$, $P_X\underset{\text{Erfolg}}{(1)} = p$
$P_X = Ber(p)$ $X \sim Ber(p)$
$E(X) = 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$
$Var(X) = p(1 - p)$

b) Gleichverteilung: $Z$ endlich. $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$ $P_X(B) = \frac{|B|}{|Z|}$ $(B \subseteq Z)$
$P_X = Unif(Z), X \sim Unif(Z)$

c) Binominalverteilung: $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$
$X_1, \ldots, X_n \sim Ber(p)$ und $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig (iid,independent and identically distributed)
(Schreibweise: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$
$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n =$ Anzahl der Erfolge.
$Z = \{0, 1, \ldots, n\}, \mathcal{Z} = \mathcal{P}(Z)$
$P_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
$P_X = Bin(n, p), X \sim Bin(n, p)$
$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \underbrace{E(X_1)}_{=P} + \ldots + \underbrace{E(X_n)}_{=p} = np$
$Var(X) = Var(X_1 + \ldots + X_n) \underset{\text{unabhängig}}{=} Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$
$= np(1 - p)$

d) Geometrische Verteilung: $p \in (0, 1)$
$T =$ Zeitpunkt des ersten Erfolges bei Wiederholung eines Bernoulli-Experiments.
Wie soll man das verstehen ?
$X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \sim Ber(p)$

$$T = inf\{n \in \mathbb{N} : X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$$

(Wobei : $inf \emptyset = +\infty$ )
Werte von $T$: $\mathbb{N}$ und $\infty$
$P[T = n] = P[X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0, X_n = 1] \overset{\text{unabh.}}{=}$
$\underbrace{P[X_1 = 0]}_{=1-p} \underbrace{P[X_2 = 0]}_{=1-p} \ldots \underbrace{P[X_{n-1} = 0]}_{=1-p} P[X_n = 1] = (1-p)^{n-1} \cdot p$

$P[T = \infty] \leq P[T > n] = P[T > n] = P[X_1 = \ldots = X_n = 0] \overset{\text{unabh.}}{=} P[X_1 = 0] \ldots P[X_n = 0] = (1-p)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$
Also $P[T = \infty] = 0$!
Damit: Wertebereich $\mathbb{N}$ ist ausreichend um T zu beschreiben.
$Geo(p) = P_T$, d.h. $Geo(p)(n) = (1-p)^{n-1} p$ für $n \in \mathbb{N}$
(Insbesondere $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (1-p)^{n-1} p = 1$)
$E(T) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n \cdot P[T = n] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n(1-p)^{n-1} p = \frac{1}{p}$, $Var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

e) Poisson-Verteilung: "Seltene Ereignisse"
Betrachte $X_n \sim Bin(n, p_n = \frac{\lambda}{n})$, $E(X_n) = np_n = n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$
Verhalten für große $n$ : $P[X_n = k] \underset{n\mapsto\infty}{\to}$ ?

$$\begin{aligned}
P[X_n = k] \\
&= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underbrace{n}_{\to n} \cdot \underbrace{n}_{\to \underbrace{n}_{\to n}}} \cdot \ldots \cdot n \quad \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\longrightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}
\end{aligned}$$

$\underset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
Poisson-Verteilung zu $\lambda > 0$: $X \sim Poi(\lambda)$

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, (k \in \mathbb{N}_0)$$

$E(X) = Var(X) = \lambda$

**Beispiel** Rosinen im Kuchen: $X_n \sim Bin(n, \frac{1}{n})$ $P[X_n = 0] =$ ?
Annäherung: $X \sim Poi(1)$ $(\lambda = 1)$
$P[X_n = k] \approx P[X = k] = e^{-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{ek!}$
$P[X_n = 0] \approx P[X = 0] = \frac{1}{e}$
$P[X_n = 1] \approx P[X = 1] = \frac{1}{e}$

**Beispiel** Rosinen im Kuchen:
$A_k^{(n)}$ = #Personen (oder Stücke) mit genau $k$ Rosinen.

$B_k^{(n)} = \frac{1}{n} A_k^{(n)}$ = relative Anzahl der Personen (oder Stücke) mit genau $k$ Rosinen.
$A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + \cdots + A_n^{(n)} = n, A_k^{(n)} = 0$ für $k > n$
$\Rightarrow \; B_0^{(n)} + B_1^{(n)} + \cdots + B_n^{(n)} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & B_2^{(1)} = 0 & \cdots & & \\
B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & B_2^{(2)} & B_3^{(2)} = 0 & & \cdots \\
\vdots & & & \ddots & & \\
B_0^{(n)} & B_1^{(n)} & \cdots & B_n^{(n)} & B_{n+1}^{(n)} = 0 & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{1}{e} & \frac{1}{e} & e^{-1} & \frac{1^k}{k!} & Poi(1)(k) & \\
& & \frac{1}{ek!} & & &
\end{array}$$

Zufallsvariable mit Dichten

**5.12 Definition** Ein W!maß $P$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ hat Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, falls $F(x) = P((-\infty, x]) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Zufallsvariable $X$ hat Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, wenn $P_x$ (die Verteilung von $X$) Dichte $f$ hat. d.h.: $F_X(x) = P[X \leq x] = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

**5.13 Bemerkung** $f$ Dichte zu $P$, dann gilt $P(B) = \int\limits_B f(t)dt$. Insbesondere $1 = P(\mathbb{R}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ und $P(\{x\}) = \int\limits_x^x f(t)dt = 0$

Umgekehrt, sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine Fkt. mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, dann ist $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ mit $P(B) = \int\limits_B f(t)dt$ ein W!maß.

**Beispiel** $f(x) = cx(1 - x)1_{[0,1]}(x) \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$x \notin [0, 1] : \; f(x) = 0$
$x \in [0, 1] : \; f(x) = cx(1 - x) \geq 0$ wenn $c \geq 0$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_0^1 cx(1 - x)dx = \int\limits_0^1 cx - cx^2 dx = \left(\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^1 = \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{3}\right) - 0 = \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow$
$c = 6$ Also ist $f(x) = 6x(1 - x)1_{[0,1]}(x)$ eine Dichte.
$P\left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1 - x)dx = \frac{1}{2}$

Erwartungswerte von ZV mit Dichte $X$ diskrete: $E(X) = \sum\limits_x xP[X = x]$

**5.14 Definition** $X$ ZV mit Dichte: $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, heißt Erwartunswer von $X$ (sofern $\int \ldots$ existiert.)
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fkt, $E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$. Insbesondere $E(X^n) = \int x^n f(x)dx$.

Varianz: $Var(X) = E((X - E(X))^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$

Rechenregeln: $X, Y$ ZV mit Dichte $a, b \in \mathbb{R}$

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ $X, Y$ Unabh.
- $Var(X + Y) = Var(X)$ $X, Y$ Unabh.

**Beispiel** Gleichverteilung auf $[a, b], a < b$
$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
$E(X) =?$ $Var(X) =?$
$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \mu$
$Var(X) = \int\limits_{a}^{b}(x - \mu^2 \frac{1}{b-a}dx = \ldots = \psi^2$

**Beispiel (Exponentialverteilung)** Parameter $\lambda > 0, Exp(\lambda)$ ist das W!maß mit Dichte
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$
$X$ ZV mit $X \sim Exp(\lambda)$ : $E(X) = \lambda = Var(X)$
Verteilungsfunktion von $Exp(\lambda)$:

Für $x < 0$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

$$x \geq 0: F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{o}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \begin{bmatrix} s = -\lambda t \\ ds = -\lambda dt \\ -\frac{1}{\lambda}ds = dt \end{bmatrix} = \int \lambda e^s \left(-\frac{1}{\lambda}\right) ds$$
$$= -\int e^s ds = -e^s = -e^{-\lambda t}|_{t=0}^{x} = -e^{-\lambda x} - (-1) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} = -xe^{-\lambda x}|_{x=0}^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} 1 \cdot (-e^{-\lambda x})dx = \ldots$
$= (-0) - 0 \cdot e^{-\lambda x} + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -0 - \left(-\frac{1}{\lambda}e^0\right) = \frac{1}{\lambda}$
Allgemein für Festes $n$: $x^n e^{-\lambda x} \underbrace{\rightarrow}_{x\rightarrow\infty} 0$
$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$

**Beispiel (Normalverleihung)** $N(\mu, \sigma^2)$ ist für $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ ist das W!maß mit Dichte
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$
Standardnormalverteilung: $N(0, 1)$
Standartisierte von $X$: $X^* = \frac{X_{E}(X)}{\sigma(X)}$. Hier: $X^* \sim N(0, 1)$
Frage bei Dichte: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = 1$
Umformung: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
Verteilungsfkt von $N(\mu, \sigma^2)$?
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$
Für $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ist $F$ tabelliert.

**5.15 Bemerkung** $X$ ZV: $F_X$ Vert.fkt., $f_X$ Dichte.
Ebenso: $P$ W!maß: $F_P$ Vert.fkt von $P$, $f_P$ Dichte von $P$.
Insb. $F_{N(0,1)}$, $f_{N(0,1)}$

# §6 Ungleichungen

$X$ ZV (reellw., diskret oder mit Dichte), $a \geq 0$. $X$ habe Dichte $f$
$aP[|X| \geq a] = aP[X \in \underbrace{(-\infty, -a] \cup [a, \infty)}_{=A}] = a \int\limits_A f(x)dx = \int\limits_A af(x)dx \leq \int\limits_A |x|f(x)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = E(|X|)$ Markov-Ungleichung

**6.1 Satz**
*$X$ ZV reellw. und $a \geq 0$: Dann gilt*
$aP[|X| \geq a] \leq E(|X|)$

**Beispiel (Markov-Ungleichung)**

$$aP[|X| \geq a] \leq E(|X|)$$

wenn $E(|X|) < \infty$.
Folgerung: $y := (X - E(X))^2 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$
in Markov-Ungleichung einsetzen: $a^2 P[(X - E(X))^2 geqa^2] \leq E((X - E(X))^2) = Var(X)$
(Vorausgesetzt: $Var(X) < \infty$)
$a^2 P[|X - E(X)| \geq a] \leq Var(X)$ (Chebyshev-Ungleichung)

## Gesetz der großen Zahlen

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ZV, unabhängig, identisch verteilt. Für $n \in \mathbb{N} : S_n = X_1 + \ldots + X_n$
Sei $\mu = E(X_i), \sigma^2 = Var(X_i)$
$\Rightarrow E(S_n) = E(X_1 + \ldots + X_n) = \underbrace{E(X_1)}_{\mu} + \ldots + \underbrace{E(X_n)}_{\mu} = n\mu, Var(S_n) = Var(X_1 + \ldots + X_n) = \underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2} + \ldots + \underbrace{Var(X_n)}_{\sigma^2} = n\sigma^2$
$\frac{1}{n} S_n$ = Durchschnittswert (arithmetisches Mittel)

$\Rightarrow E(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n} \cdot n\mu 0\mu$, $Var(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$
Sei $\epsilon > 0$ fix:

$$P[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \cdot n} \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0$$

Das ist das schwache Gesetz der großen Zahlen.
Diese Form der Konvergenz heißt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Mehr Aufwand:$(\omega, \mathcal{F}, P)$ $\{w \in \Omega : \frac{1}{n}S_n(w) \underset{n \mapsto \infty}{\Longrightarrow} \mu\}$
Ist Ereignis $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) = 1$ und es gilt: $[\frac{1}{n}S_n \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} \mu$

**Beispiel** $X_1, X_2, \ldots \overset{\sim}{iid} Ber(p)$, $E(X_n) = p$, $Var(X_n) = p(1-p)$ (iid= independent und identically distributed)
$S_n = X_1 + \ldots X_n \sim Bin(n, p)$
$\frac{1}{n}S_n$ = mittlere Anzahl an "Erfolgen" bei $n$ Wiederholungen.
Schwaches Gesetz: $P[\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \epsilon] \leq \frac{p(1-p}{\epsilon^2 n} \leq \frac{1}{4\epsilon^2 n}$
Informell: $\frac{1}{n}S_n \approx \mu$, $S_n \approx n\mu + \sqrt{n} \cdot \sigma Z$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ *iid* mit $\mu = E(X_1)$

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$\frac{1}{n}S_n n \underset{\longrightarrow}{\rightarrow} \infty\mu \ldots$ Gesetz der großen Zahlen
Informell: $S_n \approx n\mu + \sqrt{n} \cdot \sigma \cdot Z$ wobei $Z \approx N(0,1)$

$S_n \approx Y$ wobei $Y \approx'' n\mu + \sqrt{n}\sigma N(0,1)'' -'' n\mu + N(0, n\sigma^2)$" $- N(n\mu, n\sigma^2)$
$P_{S_n} \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

# §7 Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, X_2, \ldots$ ZV *iid* mit $\mu = E(X_1)$, $\sigma^2 = Var(x_1) = n\sigma^2$
Standardisierte $S_n^\wedge = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$
(dann $E(S_n^*) = 0$, $Var(S_n^*) = 1$)
Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} F_{S_n^*}(x) = F_{N(0,1)}(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

(Diese Form der Konvergenz heißt Konvergenz in Verteilung oder schwache Konvergenz.)
Ist $\rho = E(|X_1 - \mu|^3)^\infty$ , dann gilt:

$$\left|F_{S_n^*}(x) - F_{N(0,1)}(x)\right| \leq \frac{c \cdot p}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

Wobei $C = 0,7655$ gewählt werden kann. (Satz Berry-Esseen)

### 7.1 Bemerkung

$$
\begin{aligned}
F_{S_n}(x) & \\
&= P[S_n \leq x] \\
&= P[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}] \\
&= P[S_n^* \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}] \\
&> F_{S_n^*}(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \\
&\approx F_{N(0,1)}(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}
\end{aligned}
$$

**Beispiel** $X_1, X_2, \ldots$ *iid* mit $X_1 \sim Ber(p)$
$S_n = X_1 + \ldots X_n \sim Bin(n, p), \mu = E(X_1) = p, \sigma^2 = Var(X_1) = p(1 - p)$

$$
\begin{aligned}
\rho &= E(|X_1 - \mu|^3) \\
&= |0 - \mu|^3 \, P[X_1 = 0] + |1 - \mu|^3 \, P[X_1 = 1] \\
&= p^3(1 - p) + (1 - p)^3 p \\
&= p(1 - p)(1 + 2p + 2p^3) \\
&\leq \infty
\end{aligned}
$$

$S_n \sim Bin(n, p)$:

$$F_{Bin(n,p)}(x) \approx F_{N(0,1)}\left(\frac{x - p}{\sqrt{np(1 - p}}\right)$$

Etwa: $P[a < S_n \leq b] = F_{Bin}(n, p)(b) - F_{Bin(n,p)}(a) \approx F_{N(0,1)}\left(\frac{b-p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{a-p}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
"Problem": $P[S_n = a] = P[a - 1 < S_n \leq a]$

**Beispiel** Einschub: "Erzeugung" von Zufallszahlen

$$X \sim Uniform(\{0, \ldots, m - 1\})$$

$\frac{X}{m} \sim Uniform(\{\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\})$
(Annäherung an $Uniform([0, 1])$

# Index