Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Prof. P. Hauck[1]

Wintersemester 2009

Stand: 13.02.2010 23 Uhr

[1]Mitschrift: Volodymyr Piven, Alexander Peltzer, Korrektur: Demen Güler, Ben Matthes

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Beim vorliegenden Text handelt es sich um eine inoffizielle Mitschrift. Als solche kann sie selbstverständlich Fehler enthalten und ist daher für Übungsblätter und Klausuren nicht zitierfähig.

Korrekturen und Verbesserungsvorschläge sind jederzeit willkommen und können an wpiven@gmail.com oder alex.peltzer@gmail.com gerichtet werden.

Der Text wurde mit LaTeX2e in Verbindung mit dem AMS-TeX-Paket für die mathematischen Formeln gesetzt.

Kapitel 0

Einleitung

Dozent:

- Professor Dr. Peter Hauck
  Tel.: +49 (0)7071 29 70465-1
  Email: hauck@informatik.uni-tuebingen.de

Vorlesungszeiten:

- Dienstag 10-12 Uhr Hörsaalzentrum N3
- Mittwoch 10-12 Uhr Hörsaalzentrum N5

Bedingungen für den Scheinerwerb:

- Mindestens 50 Prozent der über die mit * gekennzeichneten Übungsaufgaben zu erreichenden Punkte
- Mindestens einmal vorrechnen in der Übungsgruppe
- Bestehen des Testates und der Klausur

Übungsleitung;

- Claudia Schmidt
  ckaesser@informatik.uni-tuebingen.de
- https://cis.informatik.uni-tuebingen.de/mathe3-ws-09/

Literatur:

- Wolff, Hauck, Küchlin: Mathematik für Informatik und Bioinformatik, Springer 2004, http://min.informatik.uni-tuebingen.de/
- D. Hachenberger: Mathematik für Informatiker, Pearson
- W. Stuckmann, D. W?tjen: Mathematik für Informatiker: Grundlagen und Anwendungen, Spektrum

- M. Wolff: Übungsaufgaben, Springer 2006

Wiederholung *Stetigkeit*

Beispiel $\int\limits_a^b f(x)dx$ = Flächeninhalt zwischen Graph von f und der x-Achse zwischen a und b.
Nicht integrierbar:
$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ auf $[0,1]$
Treppenfunktionen:
Flächeninhalt zwischen a und b wird definiert für Regelfunktionen (= integrierbare Funktionen).
Approximierbar durch Folge (f_n) von Treppenfunktionen.
$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$
(ersteres ist ein bestimmtes Integral)
Stetige Funktionen auf $[a,b]$ sind Regelfunktionen.
Mittelwertsatz der Integralrechnung:
f stetig auf $[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b]$:
$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$
f stetig auf $[a,b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b], f \neq 0$
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$
$\int\limits_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$, $t > 0$
$F(x) = \int\limits_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$ $\quad \cancel{\int\limits_0^x x^2 dx}$ sinnloser Ausdruck!

Kapitel 1

Vorlesung

§1 Haupsatz der Differential- und Integralrechnung

1.1 Definition Sei $\mathcal{I} =< a, b >$ ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ erlaubt)

a) $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ heißt <u>lokal integrierbar</u> , wenn f auf jedem Teilintervall $[u, v] \subseteq \mathcal{I}, u, v \in \mathbb{R}$ Regelfunktion ist, d.h. $\int\limits_u^v f(x)dx$ existiert.

b) $F\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion</u> einer lokal integrierter Funktion f, falls
$\int\limits_u^v f(x)dx = F(v) - F(u)$
für alle $u, v \in \mathcal{I}$
$\left(\text{Konvention: } v < u, \text{so} \int\limits_u^v f(x)dx := -\int\limits_v^u f(x)dx\right)$
Eine Stammfunktion von f heißt auch <u>unbestimmtes Integral</u> von f, $F = \int f(x)dx$

1.2 (Beispiel) $\mathcal{I} = \mathbb{R}, f = 1_{[0,\infty[}$ Indikatorfunktion von $[0, \infty[$

$$\left(X \subseteq \mathbb{R} : 1_x(t) = \begin{cases} 1, & t \in X \\ 0, & t \notin X \end{cases} \right)$$

Stammfunktion von f: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

$\int\limits_u^v f(t)dt = F(v) - F(u) \quad u, v < 0\checkmark$

$u, v > 0, u < v$

$\int\limits_u^v f(t)dt = F(v) - F(u)$

1.3 Satz
$\mathcal{I} \neq \emptyset$ Intervall, $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

a) Angenommen F ist Stammfunktion von f. Dann gilt G ist Stammfunktion von $f \Leftrightarrow G(x) = F(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$

b) Sei $x_0 \in \mathcal{I}$. Dann ist

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

eine Stammfunktion von f.
Wählt man anderes x_0

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0'}^{x} f(t)dt - \underbrace{\int_{x'_0}^{x_0} f(t)dt}_{=c}$$

c) Jede Stammfunktion von f ist stetig.

Beispiel Bestimmtes Integral : $\int_a^b f(x)dx$: f Regelfunktion auf $[a, b]$ (f integrierbar auf $[a, b]$), $a, b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{I}$ beliebiges Intervall: f lokal integrierbar, falls f auf jedem Intervall $[u, v] \subseteq \mathcal{I}, u, v \in \mathbb{R}$, integrierbar, das heißt Regelfunktion ist.
F: Stammfunktion von f auf $\mathcal{I}$: $\int_u^v f(x)dx = F(v) - F(u)$ $F = \int f(x)dx$ (unbestimmtes Integral)

Beweis a.) $F(v) - F(u) = (G(v) + c) - (G(u) + c) = G(v) - G(u)$

b.) $u, v \in \mathcal{I}$: 1. Fall $x_0 \leq u \leq v$

$$F(v) - F(u) = \int_{x_0}^{v} f(t)dt - \int_{x_0}^{u} f(t)dt = \int_{u}^{v} f(t)dt$$

$$\int_{x_0}^{v} f(t)dt = \int_{x_0}^{u} f(t)dt + \int_{u}^{v} f(t)dt$$

Weitere Fälle analog.

c.) Beweis mit Hilfe der Beschränktheit von Regelfunktionen. $\left|\int_u^v f(t)dt\right| \leq \int_u^v |f(t)|\, dt$
f lokal integrierbar $\Rightarrow$ Stammfunktion ist stetig.
f stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Hauptsatz}}$ Stammfunktion F ist differenzierbar, $F' = f$ □

1.4 Definition $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar , falls f differenzierbar ist und f' stetig ist. Polynome, sin, cos, exp , ln: stetig differenzierbar.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(nicht stetig in 0)

1.5 Theorem (Haupsatz der Differential und Integralrechnung) *$\mathcal{I}$ beliebiges Intervall, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$*

a.) Ist f stetig, so ist jede Stammfunktion F von f differenzierbar und $F^{'} = f$ d.h.
$f = \left(\int f(x)dx\right)^{'}$

b.) Ist f stetig differenzierbar, dann ist f eine Stammfunktion von $f^{'}$, das heißt $\int f^{'}(x)dx = f + c$
$\int\limits_u^v f^{'}(x)dx = f(v) - f(u) \quad \forall u, v \in \mathcal{I}$

Beweis a.) Sei $c \in \mathcal{I}$. Zeige: F ist differenzierbar an der Stelle c, $F^{'}(c) = f(c)$
$\lim\limits_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$!
$x \in \mathcal{I}, x \neq c$ so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\Theta(x)$ zwischen x und c mit:
$\int\limits_c^x f(t)dt = f(\Theta(x)) \cdot (x-c)$ (f stetig)
$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{\int\limits_c^x f(t)dt}{x-c} = f(\Theta(x))$
$x \to c$, so auch $\Theta(x) \to c$

$\lim\limits_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c} f(\Theta(x)) \underbrace{=}_{\text{weil f stetig ist!}} = f(c)$
$\Rightarrow F^{'}(c) = f(c) \; \forall c \in \mathcal{I}$

b.) $f^{'}$ stetig. Sei F Stammfunktion von $f^{'}$. Nach a.) gilt: $F^{'} = f^{'}$. $(F - f)^{'} = 0$
nach Mathe II 6.13a ist $F - f^{'}$ konstante Funktion
$f = F + c$ Stammfunktion von $f^{'}$ □

1.6 (Beispiele)

a) $n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{R} \quad \int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$, denn $\left(\frac{a}{n+1}x^{n+1}\right)^{'} = ax^n$
$F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$
$x_0 = 0 : \int\limits_0^x at^n dt = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$
$\int\limits_{x_0}^x at^n dt = \frac{a}{n+1}x^{n+1} - \frac{a}{n+1}x_0^{n+1}$
$\int \sum\limits_{i=0}^n a_i \cdot x^i dx = \sum\limits_{i=0}^n \frac{a}{i+1}x^{i+1} + c$

b) $\int x^{-2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$
$n \leq -2 : \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

1.7 Satz
Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ eine Potenzreihe um $a \in \mathbb{R}$ mit Konvergenzradius R, $R > 0$.
f ist Funktion auf $]a-R, a+R[= \mathcal{I}$

a) f ist differenzierbar auf $\mathcal{I}$, $f^{'}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k\,(x-a)^{k-1}$ (Potenzreihen kann man gliedweise differenzieren)

b) $\int f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + c$

(Bew. WHK 7.32)

1.8 (Beispiele)

a) $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \exp(x)^{'} = \exp(x)$
$\int \exp(x) = \exp(x) + c$

b) für $x > 0 \quad \ln^{'}(x) = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$ für $x > 0$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$ für $x \neq 0$

c) $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x + c$

d) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c \qquad \left(\cos^{'}(x) = -\sin(x)\right)$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

Wiederholung: F Stammfunktion zu f. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

x_0 fest: $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$

$F(x) = \int f(x)dx$ unbestimmtes Integral

Hauptsatz: f stetig $\Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)^{'} = f$

f stetig differenzierbar $\Rightarrow \int f^{'}(x)dx = f + c$

$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

$\int\limits_1^2 \sin(x)dx = [-\cos(x)]_1^2 = -\cos(2) + \cos(1)$

1.9 (Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen)

a) Tangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

stetig differenzierbar auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\tan^{'}(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + (\tan(x))^2 > 0$

$\Rightarrow$ streng monoton steigend auf Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

Da injektiv, existiert eine Umkehrfunktion **Arcustangens** :
$\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

nach M II, 6.7 gilt:
$(f^{-1})'(f(u)) = \frac{1}{f'(u)}$

Übungsaufgabe:$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$

Hauptsatz: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) - \arctan(a)$
$\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d.h. sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend.

Umkehrfunktion **Arcussinus**
$\arcsin : [1, -1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig und auf $]1, -1[$ stetig differenzierbar.

Übungsaufgabe: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \forall x \in]-1, 1[$

Hauptsatz $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$

c) Cosinus streng monoton fallend auf $[0, \pi]$, Wertebereich $= [-1, 1]$
Umkehrfunktion **Arcuscosinus** : $[-1, 1] \to [0, \pi]$

Übungsaufgaben:
$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1, 1[$
$\arccos(x) = -\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}$

§2 Integrationstechniken

2.1 Satz (Partielle Integration)
f,g stetig differenzierbare Funktionen.
Dann ist

$$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

für das bestimmte Integral bedeutet das:
$\int\limits_a^b f g' dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^b f' g dx$

Beweis $\int (f \cdot g)' dx = \int \left(f' g + f g'\right) dx = \int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' dx$ □

2.2 (Beispiele)

(a) $\int x\cos(x)dx = x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)dx = x\cdot\sin(x) + \cos(x) + c$
$\int\limits_0^\pi x\cos(x)dx = \pi\sin(\pi) + \cos(\pi) - 0\cdot\sin(0) - \cos(0) = \underline{-2}$

(b) $\int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln(x) - \int 1dx = x\cdot\ln(x) - x + c$

(c) $\int\cos^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) + \int\sin^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) + \int\left(1-\cos^2(x)\right)dx$
$= \cos(x)\sin(x) + x - \int\cos^2(x)dx$
$2\int\cos^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) + x + c$
$\int\cos^2(x)dx = \frac{\cos(x)\sin(x)+x}{2} + c$

2.3 Satz (Integration durch Substitution)

$f : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion G. Dann:

$$\int g(f(x))\,f'(x)dx = G(f(x)) + c$$

für das bestimmtes Integral folgt:
$\int\limits_a^b g(f(x))\,f'(x)dx = G(f(b)) - G(f(a)) = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$

Beweis g stetig $\Rightarrow G$ differenzierbar, $G\circ f$ differenzierbar.
Kettenregel: $(G\circ f)'(x) = G'(f(x))\cdot f'(x)$
Hauptsatz: $\int (G\circ f)'(x)dx = \int G'(f(x))\cdot f'(x)dx = (G\circ f)(x) + c$ □

Beispiel Merkregel: $u = f(x)$ $\quad \frac{du}{dx} = f'(x), du = f'(x)dx$
oder ersetze im $\int g(u)du$ u durch $f(x)$, du durch $f'(x)dx$

2.4 Satz

a) f stetig differenzierbar auf $\mathcal{I}$, $f(x) \neq 0 \forall x\in\mathcal{I}$
$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + c$
d.h. $\int\limits_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|) = \ln\left(\frac{|f(b)|}{|f(a)|}\right)$

b) $\int\limits_a^b g(x+c)dx = \int\limits_{a+c}^{b+c} g(x)dx$
$(Translationsinvarianz)$

c) $\int\limits_a^b g(vx)dx = \frac{1}{v}\int\limits_{av}^{bv} g(x)dx, v\neq 0$
$(Umskalierungen)$

Beweis

a) Setze $g(x) = \frac{1}{x}, G(x) = \ln(|x|) + c, x \neq 0$
2.3 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int g(f(x))\cdot f'(x)dx = G(f(x)) + c = \ln(|f(x)|) + c$

b) Setze f(x) = x + c

c) Setze f(x) = vx □

2.5 (Beispiele)

a) $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-\sin(x)}{cos(x)}dx \underbrace{=}_{2.4.a)} -\ln(|\cos(x)|) + c$

b) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$u = \frac{x}{a}, \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}, dx = a \cdot du$
$\int \frac{1}{a^2u^2+a^2}adu = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{a}\arctan(u) + c$

c) $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}dx \underbrace{=}_{2.4a)} \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + c$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$

d) $\int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g} dx \underbrace{=}_{2.1,1.9a} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'} dx$
$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$
ähnlich: $\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$

e) Kreis von Radius 1: $\{(u,v) : u^2 + v^2 = 1\}$
$v = +\sqrt{1-u^2}, -1 \leq u \leq 1$
Flächeninhalt des Halbkreises $= \int\limits_{-1}^{1} + \sqrt{1-u^2}du$
Substituiere: $u = \sin(x) \quad \frac{du}{dx} = \cos(x)$
$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$
$\underbrace{=}_{2.2c} \left[\frac{\cos(x)\sin(x)+x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

§3 Uneigentliche Integrale

Bestimmte Integrale: $\int\limits_a^b f(x)dx, \quad a, b \in \mathbb{R} \;\; I = [a,b]$
Lokal integrierbar auf I: Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[u,v] \subseteq I, u, v \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ lokal integrierbar auf $\mathbb{R}$. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dx$ existiert nicht („$= \infty$“)
$f(x) = \frac{1}{x}$ lokal integrierbar auf $]0,1]$

3.1 Definition

$\mathcal{I} = [a, b[$ $(b = \infty$ ist zugelassen$)$, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar mit Stammfunktion F.

Dann setzt man $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to b} \int\limits_a^t f(x)dx = \lim\limits_{t \to b} (F(t) - F(a))$, **falls der Grenzwert existiert**.

f heißt dann über $\mathcal{I}$ <u>integrierbar</u>, $\int\limits_a^b f(x)dx$ (uneigentliches) Integral von f über $\mathcal{I}$

Analog für $\mathcal{I} =]a, b]$, $\quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to a} \int\limits_t^b f(x)dx$

b) $\mathcal{I} =]a, b[$ $\quad (a = -\infty, b = \infty$ zugelassen), f, F wie in a).
Wähle $x_0 \in \mathcal{I}$ beliebig,
$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to a} \int\limits_t^{x_0} f(x)dx + \lim\limits_{t' \to b} \int\limits_{x_0}^{t'} f(x)dx = \lim\limits_{t \to a} (F(x_0) - F(t)) + \lim\limits_{t' \to b} \left(F(t') - F(x_0)\right)$,
falls beide Grenzwerte existieren.

3.2 (Beispiele) a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad \mathcal{I} =]0, 1]$

$0 < t < 1 : \quad \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{t \to 0} \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{t \to 0} \left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\quad \mathcal{I} =]0, 1]$

$0 < t < 1 : \quad \int\limits_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_t^1 x^{-2} dx = \left[-x^{-1}\right]_t^1 = -1 + \frac{1}{t}, \quad \lim\limits_{t \to 0} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) = \infty$ (ex. nicht)

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ existiert nicht (d.h. hat keinen endlichen Wert)

c) $f(x) = \frac{1}{e^x}$, $\quad \mathcal{I} = [0, \infty[$

$t > 0 : \quad \int\limits_0^t \frac{1}{e^x} dx = \int\limits_0^t e^{-x} dx \underbrace{=}_{2.4c} - \int\limits_0^{-t} e^x dx = \int\limits_{-t}^0 e^x dx = [e^x]_{-t}^0 = 1 - e^{-t}$

$\lim\limits_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{e^t}\right) = 1$

$\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_0^t \frac{1}{e^x} dx = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$t > 0 : \int\limits_0^t \frac{1}{1+x^2} dx \underbrace{=}_{1.9.a)} [\arctan(x)]_0^t = \arctan(t)$

$\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim\limits_{t \to \infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{1}{1+x^2}$ ist symmetrisch zur y-Achse.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

3.3 Satz

$I =< a,b >,\ f,g:\ I \to \mathbb{R}$

a.) Vergleichskriterium

Ist $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in I$ und ist g über I integrierbar (d.h. $\int_a^b g(x)dx$ existiert) und wenn f lokal integrierbar auf I, dann gilt:

f und $|f|$ sind über I integrierbar und

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

b.) f und g über I integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ auf I integrierbar,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

c.) Ist $|f|$ über I integrierbar, g beschränkt und lokal integrierbar auf I, so ist $f \cdot g$ und $|f| \cdot |g|$ auf I integrierbar.

3.4 Satz

a.) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

So genannte Gauß'sche Glockenkurve

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = ?$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} \underbrace{=}_{\text{Potenzreihe für die Exp.fkt.}} \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}} \leq \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}$

3.2d): $\frac{1}{1+x^2}$ ist über $\mathbb{R}$ integrierbar.

3.3a): $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist über $\mathbb{R}$ integrierbar.

Man kann zeigen: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$

b.) $\mu \in \mathbb{R}, \delta > 0 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \delta} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$

f heißt Dichtefunkion der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung δ.

§4 Der Satz von Taylor

Sei f differenzierbar an der Stelle c.
f lässt sich „gut“ approximieren durch eine Gerade.
(Polynom vom Grad ≤ 1)

$T_1(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$
$T_1(x) = f(c)$

$T_1^{'}(c) = f^{'}(c)$
$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-T_1(x)}{x-c} = 0$
$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)+f^{'}(c)(x-c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \lim\limits_{x\to c} f^{'}(x) = f^{'}(c) - f^{'}(c) = 0$
Bessere Approximation durch Polynome T_n n-ten Grades.
$T_n(c) = f(c)$
$T_n^{'}(c) = f^{'}(c)$
$T_n^{''}(c) = f^{''}(c)$
$\vdots$
n-te Ableitung

4.1 Definition $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, \mathcal{I} Intervall.$

a) $f^{(0)} := f$.
Ist f differenzierbar auf $\mathcal{I}$, so $f^{(1)} := f^{'}$ **erste Ableitung** von f.
Angenommen n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f existiert, dann:
Ist $f^{(n)}$ differenzierbar, so ist $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)^{'}$ **(n+1)te-Ableitung** von f.
$\left(f^{(2)} = f^{''}, \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}\right)$
Ist f n-mal differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f **unendlich oft differenzierbar**.

b) Ist f n-mal differenzierbar und ist $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.
(f (n+1)-mal differenzierbar $\Rightarrow$ fn-mal stetig differenzierbar)

Beispiel Jedes Polynom ist unendlich oft differenzierbar. (auf ganz $\mathbb{R}$)
ebenso exp, sin, cos

4.2 Definition $\mathcal{I}$ Intervall, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, f n-mal differenzierbar, $c \in \mathcal{I}$.
Dann gibt es genau ein Polynom T_n vom Grad $\leq n$ (das von f und c abhängt) mit

$$T_n^{(i)}(c) = f^{(i)}(c)$$

Es ist:
$T_n(x) = f(c) + f^{'}(c)(x-c) + \frac{f^{''}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{'''}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$
T_n heißt n-tes **Taylorpolynom** zu f am **Entwicklungspunkt** c.

Beweis Jedes Polynom vom Grad $\leq n$ lässt sich schreiben in der Form
$p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i$ (Übungsaufgabe)
Bedeutung $p(c) = f(c), p^{'}(c) = f^{'}(c), \cdots, p^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$ □

$p(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_{(n)}(x-c)^n$
$p^{'}(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots + n \cdot a_{(n)}(x-c)^{n-1}$
$p^{''}(x) = 2!a_2 + 3!a_3(x-c) + \cdots + n(n-1) \cdot a_{(n)}(x-c)^{n-2}$
$\vdots$
$p^i(x) = i!a_i + \cdots + n(n-1)\cdots(n-i+1) \cdot a_{(n)}(x-c)^{n-i}$
$p(c) = f(c) \Leftrightarrow a_0 = f(c)$

$p'(c) = f'(c) \Leftrightarrow a_1 = f'(c)$
$p''(c) = f''(c) \Leftrightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$
$\vdots$
$p^{(i)}(c) = f^{(i)}(c) \Leftrightarrow a_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}$

4.3 Satz
$f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ Intervall, f n-mal stetig differenzierbar, $c \in \mathcal{I}$
T_n n-tes Taylorpolynom von f an c.
Ist $f(x) = T_n(x) + R(x)$, so gilt für das „Restglied“ $R(x)$:

$$\lim_{x\to c} \frac{R(x)}{(x-c)^n} = 0$$
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-c)^n} = 0$$

Beweis $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-c)^n} \underbrace{=}_{\text{L'Hop.}} \lim_{x\to c} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}} \underbrace{= \cdots =}_{\text{L'Hop.}} \lim_{x\to c} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0$ □

4.4 Beispiel

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 1, \underline{c = 0}$
$T_1(x) = 1 + 0(x-0) = 1$
$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x^2$
$T_3(x) = 1 + x^2 + x^3$
$i > 3 : T_i(x) = T_3(x)$
$f(x) = x^3 + x^2 + 1, \underline{c = 1}$
$T_0(x) = f(1) = 3$
$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 3 + 5(x-1) = -2 + 5x$
$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = -2 + 5x + 4(x-1)^2 = -2 + 5x + 4\left(x^2 - 2x + 1\right)$
$= 2 - 3x + 4x^2$
$T_3(x) = 2 - 3x + 4x^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 = 2 - 3x + 4x^2 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$= x^3 + x^2 + 1$

b) $f(x) = exp(x)$
$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

4.5 Satz (von Taylor)
$\mathcal{I}$ Intervall, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $(n+1)$-mal differenzierbar, $c \in \mathcal{I}$.
Sei T_n das n-te Taylorpolynom zu f an c.
Dann gibt es für jedes $x \in \mathcal{I}$ eine Zwischenstelle y zwischen x und c (y hängt von x ab), so dass:

(Lagrangesche Form des Restglieds)

$$R(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{n+1}(y)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{n+1}(y)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$
Sogenannte Taylor-Entwicklung von f an c.

Beweis
$g(x) = (x-c)^{n+1}$
Es ist $R^{(k)}(c) = 0$ *für* $k = 0, \ldots, n$ $\;f^{(k)}(c) = T_n^{(k)}(c)$
$g^{(k)}(c) = 0$ *für* $k = 0, \ldots, n.$

$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x)-R(c)}{g(x)-g(c)} \underset{2.MWS}{=} \frac{R'(x_1)}{g'(x_1)}$ *für* x_1 *zwischen x und c*

$= \frac{R'(x_1)-R'(c)}{g'(x_1)-g'(c)} \underset{2.MWS}{=} \frac{R''(x_2)}{g''(x_2)}$ *für* x_2 *zwischen* x_1 *und c*

$\underset{2.MWS}{=} \frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$

Setze $y = x_{n+1}$: $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

4.6 Korollar *f ist Polynom vom Grad n* $\Leftrightarrow f^{(n)} \neq 0, f^{(n+1)} = 0$
f ist $(n+1)$*-mal differenzierbar.*
Beweis: „$\Rightarrow$*“* ✓
„$\Leftarrow$“ 4.5 : $f(x) = T_n(x)$ *f.a.x*

4.7 Beispiel

Wie gro? muss man n wählen, damit $|exp(x) - T_n(x)| < \frac{1}{100} \forall x \in [0,1]$?
(T_nTaylorpolynom zu $exp, c = 0$)
$|exp(x) - T_n(x)| \underset{4.5}{=} \left|\frac{exp(y)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$ für ein $y \in |0, x|$

$\leq \max_{x\in[0,1], y\in[0,1]} \frac{exp(y)}{(n+1)!}x^{n+1} \underset{x=1,y=1}{=} \frac{e}{(n+1)!} < \frac{2{,}72}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$

Bedingung: $(n+1)! < 272.$
$n = 5: \quad T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$

Frage: Was passiert, wenn man beim Taylorpolynom T_n zu f (an c) n gegen ∞ gehen lässt?
Polynom $\rightarrow$ Potenzreihe (Taylorreihe)

- Im allgemeinem konvergiert Taylorreihe nicht
- Wenn sie konvergiert, muss sie nicht notwendigerweise gegen $f(x)$ konvergieren.

4.8 Satz (Lokale Extrema)
f: $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. $c \in \mathcal{I}$. *Sei f zweimal stetig differenzierbar.*
Ist $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) < 0$*, so ist f(c) ein lokales Maximum.*
Ist $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) > 0$*, so ist f(c) ein lokales Minimum.*

4.9 Definition $\mathcal{I}$ Intervall, $f \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $c \in \mathcal{I}$.
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ heißt **Taylorreihe** von f (um Entwicklungspunkt c)

4.10 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, a < b, f$ unendlich oft differenzierbar. Dann sind alle $f^{(n)}$ stetig auf $[a,b]$.
Norm $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(n)}\right| \in \mathbb{R}$ (existiert für alle $n \in \mathbb{N}_0$)
Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty = 0$
Ist $c \in [a,b]$, so ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ für alle $x \in [a,b]$

Beweis 4.5. $|f(x) - T_n(x)| = \left|\frac{f^{(n-1)}(y)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty (b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ □

4.11 Beispiel

$f(x) = \sin(x), f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x), f'''(x) = -\cos(x), f^{(4)}(x) = \sin(x)$
$f^{(4k)}(x) = \sin(x), f^{(4k+1)}(x) = \cos(x), f^{(4k+2)}(x) = -\sin(x), f^{(4k+3)}(x) = -\cos(x), \forall k \in \mathbb{N}_0$
Entwiklung um $c = 0$.
$f^{(2i)}(0) = 0$
$f^{(1)}(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 1$
$f^{(3)}(0) = f^{(7)}(0) = \cdots = -1$

Taylorreihe: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

auf jedem endlichen Intervall und daher für alle x gilt:

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Analog:

$$\cos(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

4.12 Satz

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ Potenzreihe mit Korvergenzradius $R > 0$ und
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ auf $]c-R, c+R[$
Dann ist diese Potenzreihe die Taylorreihe von f (um c), d.h. $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$

Beweis Potenzreihe von f lässt sich gliedweise differenzieren um Ableitung von f zu erhalten (und entsprechend höhere Ableitung). c einsetzen in $f^{(k)}(x)$ liefert Behauptung Taylorreihe um $c = 0$ für $\exp(x)$ ist $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ □

Beispiel $exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$ an der Stelle $c = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ an der Stelle $c = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ an der Stelle $c = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Im Allgemeinen existiert hier keine gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$.
Bei gleichmäßiger Konvergenz hängt die Approximation NICHT von x ab, bei nicht

gleichmäßiger Konvergenz lässt sich zwar in einem fest definierten Intervall I eine gute Approximation für n finden; allerdings gilt diese nicht von $]-\infty, \infty[$.

Die Potenzreihe für sin (oder cos, exp) ist nicht gleichmäßig konvergent:
$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ liegt nicht über ganz $\mathbb{R}$ „eng“ bei sin

4.13 Beispiele

a.) $f(x) = \ln(x)$ auf $]0, \infty[$
$c > 0$
Taylorreihe von f um c: $\ln(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{c^k \cdot k} \cdot (x-c)^k$
Die Reihe konvergiert nur auf $]0, 2c]$ (gegen $\ln(x)$) und konvergiert nicht auf $]2c, \infty[$

$$\ln(x) = \ln(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{c^k \cdot k}(x-c)^k \text{ für } x \in]0, 2c]$$

$\ln(x)$ lässt sich nicht durch Taylorreihe auf $[0, \infty]$ darstellen! (obwohl unendlich oft differenzierbar auf $]0, \infty[$)
für jedes $x > 0$ kann man ein c wählen, so dass $x < 2c$; dann wird $\ln(x)$ durch Taylorreihe um c dargestellt.
Speziell:

$$c = 1 : \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2]$$

Speziell:

$$x = 2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

b.) $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f ist unendlich oft differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k. Taylorreihe zu f um $c = 0$: Nullreihe
Taylorreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, aber nur in $c = 0$ gegen f.

§5 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Ziel: Darstellung periodischer Funktionen durch sin und cos Funktionen.

5.1 Definition $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $\omega > 0$, falls $f(t) = f(t+\omega)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
f ist ω-periodische Funktion $\Rightarrow$ f ist 2ω-periodisch, 3ω-periodisch $\cdots$

$f(t) = f(t-\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}$
$f(t) = f(t+k\omega)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$
Jede Funktion f auf $[0, \omega[$ lässt sich ω-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen zu Funktion $\widetilde{f}$
$x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $t \in [0, \omega[$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = t + k\omega$

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(t+k\omega) := f(t)$$

5.2 Beispiel

a) Sei $r > 0$. $\sin(rt), \cos(rt)$ periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{r}$
$f(t) = \sin(rt)$
$f\left(t + \frac{2\pi}{r}\right) = \sin\left(r\left(t + \frac{2\pi}{r}\right)\right) = \sin(rt + 2\pi) = \sin(rt) = f(t)$

b) Ist f ω-periodisch und ist $\omega' > 0$, so ist $\widetilde{f}(t) := f\left(\frac{\omega t}{\omega'}\right)$ ω'-periodisch
$\left(\widetilde{f}(t+\omega')\right) = f\left(\frac{w(t+\omega')}{\omega'}\right) = f\left(\frac{\omega t}{\omega'} + \omega\right) = f\left(\frac{\omega t}{\omega'}\right) = \widetilde{f}(t)$

Taylorpolynome:		**Trigonometrische Polynome**:
Gute Approximation einer n-mal diffb. Funktion in der Nähe des Enwicklungspunktes (durch Polynome)	$\leftrightarrow$	Approximation einer periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ (durch Kombination von sin und cos-Funktionen)
Taylorreihen:		Fourierreihen:
Darstellung einer unendlich oft diffb. Funktion durch Potenzreihe (unter gewissen Vorgaben)	$\leftrightarrow$	Unendliche Reihen von sin-, cos-Funktionen. Darstellung von periodischen Funktionen (unter gewissen Vorgaben)

5.3 Definition Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right)\right)$$

wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \omega > 0, n \in \mathbb{N}$, heißt **trigonometrisches Polynom** der Ordnung n bezüglich der Periode ω.

Beachte: Terme unter dem Summenzeichen sind $\frac{\omega}{k}$-periodisch, sie oszillieren immer schneller mit wachsendem k, $p(t)$ ist ω-periodisch.

5.4 Lemma (Additionstheoreme)

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

5.5 Satz (Orthogonalitätsrelationen)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

a) $\int\limits_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = \begin{cases} 0, & \textit{falls } m \neq n \\ \pi, & \textit{falls } m{=}n \end{cases}$

b) $\int\limits_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0, & \textit{falls } m \neq n \\ \pi, & \textit{falls } m{=}n \end{cases}$

c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin(mt)\cos(nt)dt = 0$

Beweis nur b) 5.4:

$$\begin{aligned} \cos((m+n)t) &= \cos(mt)\cos(nt) - \sin(mt)\sin(nt) \\ \cos((m-n)t) &= \cos(mt)\cos(-nt) - \sin(mt)\sin(-nt) \\ &= \cos(mt)\cos(nt) + \sin(mt)\sin(nt) \end{aligned}$$

Addition und Division durch 2 liefert:
$\cos(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)]$ □

$\int\limits_0^{2\pi} \cos(mt)cos(nt)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos((m+n)t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos((m-n)t)dt$
$m \neq n$, falls $m-n$ betrachtet wird.
$\int\limits_0^{2\pi} cos((m \pm n)t)dt \underset{2.4c}{=} \frac{1}{(m\pm n)} \int\limits_0^{2\pi(m\pm n)} \cos(t)dt$
$= \frac{1}{(m\pm n)} [\sin(t)]_0^{2\pi(m\pm n)} = 0$

$m \neq n : \int\limits_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = 0$
$m = n : \int\limits_0^{2\pi} \cos(mt)^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos(0)dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$

5.6 Satz

Sei

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{w}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{w}\right)\right)$$

ein trigonometrisches Polynom (zur Periode w)
Dann ist $a_k = \frac{2}{w}\sum\limits_0^{w} p(t)\cos(\frac{2\pi kt}{w})dt$ *für* $k = 0,\dots,n$, $b_k = \frac{2}{w}\int\limits_0 wp(t)\sin(\frac{2\pi kt}{w})$ *für* $k = 1,\dots,n$
Beweis:
$\frac{2}{w}\int\limits_0^{w} p(t)\cos(\frac{2\pi kt}{w})dt = \frac{2}{w}\frac{a_0}{2}\int\limits_0^{w} 1\cdot\cos(\frac{2\pi kt}{w}\cos(\frac{2\pi kt}{dt})dt + \frac{2}{w}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^{w}\cos(\frac{2\pi kt}{w})\cos(\frac{2\pi kt}{w})dt +$
$\frac{2}{w}\sum\limits_{j=1}^{n} b_k \int\limits_0^{w}\sin(\frac{2\pi jt}{w})\cos(\frac{2\pi kt}{w})dt$
$k = 0 :\ = 0,$ *da* $k > 0, 2.4c$ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^{w}\cos(\frac{2\pi jt}{w})dt = 0,$ *nach 2.4c*

$\int\limits_{j=1}^{n} b_k \int\limits_0^{w}\sin(\frac{2\pi jt}{w})dt = 0$ *, nach 2.4.c)*

$k \in \{1,\ldots,n\} : a_k \frac{2}{2} \int\limits_0^w \cos(\frac{2\pi kt}{w})^2 dt \underset{2.4.c)}{=} \frac{2a_k}{w} \frac{w}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(kt)^2 dt \underset{5.5.b)}{=} \frac{2a_k}{w} = a_k$

5.7 Satz
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige periodische Funktion mit Periode ω. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom p (zur Periode ω) mit

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right)$$

Nach 5.6: $a_k = \frac{2}{\omega} \int\limits_0^\omega p(t) \cos(\frac{2\pi kt}{\omega}) dt, \quad b_k = \ldots$
Sehr ähnlich:
$a_k = \frac{2}{\omega} \int\limits_0^\omega f(t) \cos(\frac{2\pi kt}{\omega}) dt \to$ *trigonometrisches Polynom mit* a_k, b_k.
Hoffnung: gute Approximation an f.

5.8 Definition Eine Reihe der Form $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{\omega}) + b_k \sin(\frac{2\pi kt}{\omega})$
heißt (reelle) **Fourierreihe** (oder trigonometrische Reihe) (zur Periode ω)

Die a_i b_i heißen die **Fourierkoeffizienten** der Reihe (J. Fourier, 1768-1830)

Angenommen die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[0, w]$ gegen $f(t)$
d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n \geq N$:

$$* \quad \left| f(t) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) \right) \right| < \varepsilon$$

Dann auch auf ganz $\mathbb{R}, \forall t \in [0, w]$ (weil die Reihe ω-periodisch ist).

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) \right)$$

5.9 Satz
Unter Voraussetzung $(*)$ *gilt:*
$a_k = \frac{2}{w} \int\limits_0^w f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) dt, \ \forall k \in \mathbb{N}_0$
$b_k = \frac{2}{w} \int\limits_0^w f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) dt, \ \forall k \in \mathbb{N}$

Beweis Wie 5.6 Beachte: Bei gleichmäßiger Konvergenz kann man $\int\limits_0^w$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ vertauschen. (WHK 7.23) □

Frage: Gegeben ω-peiodische Funktion f.
Wann lässt sich f als Funktion schreiben, d.h. wann konvergiert Fonrierreihe gleichmäßig gegen f?

5.10 Definition f ω-periodische Funktion, über $[0, \omega]$ integrierbar. (Dann ist f auf $\mathbb{R}$ lokal integrierbar.)
Dann kann man a_k, b_k ausrechnen wie in 5.9.
Die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right)$$

heißt **Fourierreihe** zu f.

Beweis 8.9 WHK □

Frage: für welche f konvergiert Fourierreihe gleichmäßig gegen f?
(Dann lässt sich f beliebig genau durch Teilsummen der Fourierreihe von f (= trig. Funktion) approximieren)

5.11 Satz
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode ω.
Sei f auf $[0, \omega]$ stückweise stetig differenzierbar.
(D.h. $0 + t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$, so dass $f_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar.)

a) *Die Fourierreihe zu f konvergiert gleichmäßig gegen f auf $\mathbb{R}$, insbesondere* $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\omega} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right), a_k, b_k$ *wie in 5.10/5.9*

b) *Ist f gerade, d.h. $f(t) = f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, so ist $b_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, d.h.* $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right)$ *reine **Cosinus-Reihe***

c) *Ist f ungerade, d.h. $f(t) = -f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, so ist $a_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0$, d.h.* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right)$ *reine **Sinus-Reihe***

5.12 Bsp:
$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ 2\pi - t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$ mit periodischer Fortsetzung auf $\mathbb{R}$
f erfüllt die Voraussetzung von 5.11 $\omega = 2\pi$
Reine Cosinus-Reihe, da $f(t) = f(-t)$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos(kt)dt}_{=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt$$

$$k = 0: \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 = \pi$$

$k \geq 1: \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} t \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi k} \int\limits_0^{\pi} kt \cos(kt) dt \underbrace{=}_{2.4c)} \frac{2}{\pi k^2} \int\limits_0^{k\pi} t \cos(t) dt \underbrace{=}_{2.2.b)} \frac{2}{\pi k^2} [t \sin(t) +$
$cos(t)]_0^{k\pi} = \frac{2}{\pi k^2} \left(\underbrace{k\pi \sin(k\pi)}_{0} + \cos(k\pi) - \underbrace{cos(0)}_{1} \right) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos((2l-1)t)}{(2l-1)^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für $t = 0$
$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(0)}{(2l-1)^2} \qquad \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{1}{4} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{8}$
$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5.13 Beispiel
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ω-periodisch und integrierbar über $[0, \omega]$.
Setze $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{\omega}\right) \right)$,
a_i, b_i gebildet wie in 5.8 $*$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w} \int\limits_0^{w} |f(t) - P_n(t)|^2 \, dt = 0$$

(mittlere quadratische Abweichung)

5.14 Beispiel
$f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi]$
(periodisch fortsetzen)
Fourierreihe: $2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kt)}{k}$

5.15 Bemerkung Theorie der Fourierreihen wird oft durch $\mathbb{C}$ beschrieben.

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, \quad a_i \in \mathbb{C}$
Konvergenz wie in $\mathbb{R}$, wobei Betrag der Betrag in $\mathbb{C}$

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = g(t) + ih(t)$
$g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f integrierbar $\Leftrightarrow g,h$ integrierbar, $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b g(t)dt + i\int\limits_a^b h(t)dt$
Analog: Differenzierbarkeit

b) $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ def. $e^z := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$
konvergiert auf $\mathbb{C}$
$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad (e^z)^n = e^{n \cdot z}, n \in \mathbb{N}$

c) Es gilt die Eulersche Formel:
$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t),\ t \in \mathbb{R}$
$\left|e^{it}\right| = \sqrt{\cos^2(t) + i\sin^2(t)} = 1$
$e^{it} = e^{i(t+2k\pi)}\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$
$e^{it} :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch
Jede komplexe Zahl z lässt sich darstellen durch:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

$r = |z| \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi$

Beispiel $z = 4 - 3i$
$|z| = \sqrt{16+9} = 5$
$\cos(\varphi) = \cos(2\pi - \varphi) = \frac{4}{5}$
$\varphi = 2\pi - arccos\left(\frac{4}{5}\right)$
$z = 5 \cdot e^{\left(2\pi - arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)} \approx 5 \cdot e^{5{,}64i}$

d) Komplexe Fourierreihe einer ω-periodischen Funktion $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{2\pi kt}{\omega}}$$

$\left(\text{Konvergenz der Reihe bedeutet: } \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{i\frac{2\pi lt}{\omega}}, \sum\limits_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l} e^{-i\frac{2\pi lt}{\omega}} \text{ konvergiert}\right)$
Falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert, so gilt:

$$\alpha_k = \frac{1}{w}\int\limits_0^{\omega} f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{\omega}}dt \qquad \text{(vgl 5.9)}$$

f stetig differenzierbar, so ist f komplexe Fourierreihe
$f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ \hookrightarrow$ erhält man die reelle Fourierreihe (WHK S.251/252)

5.16 Definition ω-periodische Funktion $f\ \ \to$ Fourierreihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-i\frac{2\pi kt}{\omega}}$
Periode der $e^{-i\frac{2\pi kt}{\omega}}$ ist $\frac{\omega}{k}$, Frequenz: $\frac{k}{\omega}$ $\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)$
Angenommen f ist nicht periodisch $(\omega \to \infty)$
Man benötigt alle Frequenzen zur Approximation.

$$\sum \hookrightarrow \int$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(u)e^{iut}dt$$

Geeignetes $\tilde{g}$ findet man durch Fouriertransformation unter gewissen Voraussetzungen:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar , d.h. ist $f(t) = g(t) + ih(t)$, so müssen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

existieren. Dann existiert $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt$ **Fouriertransformation** von f.

5.17 Satz
Ist f stetig und absolut integrierbar und $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$, so ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)e^{iut}du$$

Beispiel $b > 0$
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-b, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt \\ &= \int_{-b}^{b} e^{-iut}dt \\ &= \underbrace{\int_{-b}^{b} \cos(-ut)dt}_{\frac{2\sin(ub)}{u}, u\neq 0} + i\underbrace{\int_{-b}^{b} \sin(-ut)dt}_{0} \end{aligned}$$

$\hat{f}(u) = \frac{2\sin(ub)}{u}, u \neq 0$
$\hat{f}(0) = 2b, u = 0$ $\underline{\text{stetig}}$
$\lim\limits_{u\to 0} \frac{2\sin(ub)}{u} \underbrace{=}_{L'Hospital} \overline{2b}$

§6 Vektorraeume

Lineare Algebra, Vektorräume über Körpern
Körper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p Primzahl)

6.1 Definition Sei $(V, +)$ eine kommutative Gruppe
Nullelement: $\overrightarrow{0}$ (Nullvektor)
Inverse zu v bzgl. $+$: $-v$
$v + (-v) = \overrightarrow{0}$
$v + (-w) = v - w$

Sei K ein Körper.
V heißt **K-Vektorraum** (Vektorraum über K), falls

$$\text{Abb.} \begin{cases} K \times V \longrightarrow V \\ (a, v) \longmapsto av \in V \end{cases}$$

Multiplikation von Vektoren (Elemente von V) mit Skalaren (Elemente von K) existiert mit folgenden Eigenschaften:
für alle $v, w \in V,\ a, b \in K$:

(1) $\underbrace{(a + b)}_{Add.in K} v = av \underbrace{+}_{Add.in V} bv$

(2) $a(v + w) = av + aw$

(3) $(a \cdot b)v = a(bv)$

(4) $1 \cdot v = v$

6.2 Beispiele

a) K bel., $V = \{0\}$ **Nullraum**

b) V = Menge der Ortsvektoren in der Ebene (oder im 3-dim. Raum)
$K = \mathbb{R}$
Wie im obigen Bsp.

c) $K, V = K^n$ = Menge aller Spaltenvektoren der Länge n über K

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V,\ a_i \in K.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},\ a \in K$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot a_1 \\ \vdots \\ a \cdot a_n \end{pmatrix} \in K$$

Zeilenvektor $(a_1, \cdots, a_n)$

$$(a_1, \cdots, a_n)^t = \begin{pmatrix} a \cdot a_1 \\ \vdots \\ a \cdot a_n \end{pmatrix} \text{(t = Transponieren)}$$

d) K ist K-Vektorraum
Addition von Vektoren = Addition in K
Multiplikation mit Skalarprodukt = Multiplikation in K

e) $K[x]$ ist K-Vektorraum

$a \in K,\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in K[x]$

$a \cdot f \ = \ \sum_{i=0}^{n} a \cdot a_i \cdot x^i$

f) M Menge, K Körper

$K^M = \{f : M \to K\}$ Menge aller Abb. von M nach K.

K^M wird K-Vektorraum:

$f, g \in K^M \quad f + g = ? \quad (f + g)(m) := \underbrace{f(m)}_{\in K} + \underbrace{g(m)}_{\in K}$

$a \in K, f \in K^M \quad a \cdot f = ? \quad (a \cdot f)(m) := \underbrace{a}_{\in K} \cdot \underbrace{f(m)}_{\in K}$

für alle $m \in M$

(Vektoraxiome nachrechnen.)

z.B. $a, b \in K, f \in K^M$

(1) z.z. $(a + b)f \ = \ af + bf$

$$\begin{aligned} ((a + b)f)\,(m) \ &= \ (a + b) \cdot f(m) \ = \ a \cdot f(m) + b \cdot f(m) \\ &= \ (af)(m) + (bf)(m) \ = \ (af + bf)(m)\ \forall\ m \in M \end{aligned}$$

Also: $(a + b)f \ = \ af + bf$

$\mathbb{Z}_7^3$ ist $\mathbb{Z}_7$ Vektorraum

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

6.3 Lemma

V K-Vektorraum , $v \in V, a \in K$

a.) $0 \cdot v = \overrightarrow{0}$

b.) $a \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

c.) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis:

1. $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v \underset{(1)}{=} 0 \cdot v \underset{\text{Add. in } V}{+} 0 \cdot v$

Addiere: $-(0 \cdot v) =$

$\overrightarrow{0} = 0 \cdot v + \underbrace{0 \cdot v - (0 \cdot v)}_{=v} = 0 \cdot v$

6.4 Definition V K-VR.

a.) $v_1, \ldots, v_m \in V, \ \ a_1, \ldots, a_m \in K$
Dann heißt $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$
Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$

b.) $U \neq \emptyset, U \subseteq V$ heißt **Unter(vektor)raum** oder **Teilraum** von V, falls gilt:

$\forall u_1, u_2 \in U \ \forall a_1, a_2 \in K : a_1 u_1 + a_2 u_2 \in U$
Insbesondere: $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U \ (a_1 = a_2 = 1)$

$u \in U \underset{6.3.c)}{\Rightarrow} -u \in U \ (u_1 = u, u_2 = 0, a_1 = -1, a_2 = 1)$

für alle $v, w \in V, a, b \in K$ gilt:

(1) $(a + b)v = av + bv$

(2) $a(v + w) = av + aw$

(3) $(a \cdot b)v = a(bv)$

(4) $1 \cdot v = v$

6.5 Bemerkung 6.4.b) äquivalent zu:
U ist selbst Vektorraum bezüglich der Addition in Vektorräumen und Multiplikation mit Skalaren auf V

6.6 Beispiele

a.) V K-VR, $\overrightarrow{0} \neq v \in V$
$G = \{bv : b \in K\}$ Unterraum von V
$a_1(b_1 v) + a_2(b_2 v) \underset{(3)}{=} (a_1 b_1)v + (a_2 b_2)v \underset{(1)}{=} \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}_{\in K} v \in G$

$(v = \overrightarrow{0} : G = \{0\}$

b.) $v, w \neq \overrightarrow{0} \quad E = \{av + bw : a, b \in K\}$ ist Unterraum
Falls $w \neq \{av : a \in K\}, V = K^2, E = K^2$

Allgemein: $v_1, \ldots, v_m \in V$ fest gewählt.
$U = \{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m : a_1, \ldots, a_m \in K\}$ ist Unterraum von V.

c.) $\mathbb{R}^2$
(Punkte auf einer Geraden, die nicht durch 0 verläuft, bilden keinen VR.
$H = u + G = \{u + aw : a \in \mathbb{R}\}$

d.) I Intervall in $\mathbb{R}$
$C(I)$ Menge aller stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}$
$C(I)$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^I$

Zusammenfassung: K-Vektorraum V
$v_1 \dots v_n \in V,\ a_1, \dots, a_n \in K$
$a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$
$U \neq \emptyset$ ist Unterraum von V $\Leftrightarrow \forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
$\forall u \in U \forall a \in K : au \in U$

6.7 Satz

V K-VR, U_1, U_2 Unterräume von V,

a.) *$U_1 \cap U_2$ ist Unterraum*

b.) *$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum.*
<u>*Bew.*</u>*: b.) $a \in K, u_i \in U_i :\quad a(u_1 + u_2) = \underbrace{au_1}_{\in U_1} + \underbrace{au_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$*
$u_1, u_1^{'} \in U_1,\ \ u_2, u_2^{'} \in U_2$
$(u_1 + u_2) + (u_1^{'} + u_2^{'}) = \underbrace{(u_1 + u_1^{'})}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u_2^{'})}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$
Beachte: $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum.

6.8 Definition

V K-VR, U_1, U_2 Unterräume von V.
Falls $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, so ist V die (innere) **direkte Summe** von U_1 und U_2:

$$V = U_1 \oplus U_2$$

U_1 Komplement zu U_2 (U_2 Komplement zu U_1)

6.9 Beispiel

a.) Beispiel zu 6.8:
$\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$

b.) $V = K^2$
$U_1 = \{a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} : a \in K\} = \{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} : a \in K\}$
$U_2 = \{b \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} : b \in K\} = \{\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} : b \in K\}$
$U_1 + U_2 = K^2 \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$
$U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\} \ \ \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
$K^2 = U_1 \oplus U_2$
$U_3 = \{c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} : c \in K\} = \{\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} : c \in K\}$
$U_1 \cap U_3 = \{\overrightarrow{0}\} \quad \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \Rightarrow a = c, 0 = c$

$K^2 = U_1 + U_3$
Gegeben: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2$
Gesucht: $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in U_2$
$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$
$x + y = a$
$y = b$
$x = a - y = a - b$
$\begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
$K^2 = U_1 \oplus U_3$
U_3 ist auch Komplement zu U_1.
Komplemente zu Unterraum sind nicht eindeutig bestimmt. U_3 ist auch Komplement zu U_2

c.) $V = \mathbb{R}^3$
$E_1 = \{r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R}\}$
$E_2 = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{R}\}$
Unterräume nach 6.6b)
$E_1 \cap E_2 = \{k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R}\}$
Beliebiger Vektor in E_1 : $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$, Beliebiger Vektor in E_2 : $\begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix}$
Vektor in $E_1 \cap E_2$: $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ t+u \\ u \end{pmatrix}$
$r = u, t + u = 0, s = u \quad r = s = u \quad t = -u$
$\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \in E_1 \cap E_2$
$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
$\underbrace{a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in E_1} + \underbrace{b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in E_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$
Oder auch:

$$\underbrace{(a-c)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in E_1}+\underbrace{(b-c)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in E_2}=\begin{pmatrix}a-c\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b-c\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$
$$=\underbrace{\begin{pmatrix}a-c\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in E_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}c\\b\\c\end{pmatrix}}_{\in E_2}$$

6.10 Satz
V K-VR, U_1, U_2 Unterräume in V. Dann sind äquivalent:

(1) $V = U_1 \oplus U_2$

(2) Jeder Vektor $v \in V$ hat eindeutige Darstellung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) *Angenommen es existieren $v \in V$ mit:*
$v = u_1 + u_2 = u_1' + u_2', \quad u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2,$
$\Rightarrow \underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} = \underbrace{u_2' - u_2}_{\in U_2} \in U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$
$\Rightarrow u_1 = u_1', u_2 = u_2'$
(2) $\Rightarrow$ (1) : *Klar:* $V = U_1 + U_2$
Zeige: $U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$
Sei $v \in U_1 \cap U_2 \quad v = \underset{\in u_1}{v} + \underset{\in u_2}{\overrightarrow{0}} = \underset{\in u_1}{\overrightarrow{0}} + \underset{\in u_2}{v}$
Eindeutigkeit der Darstellung: $v = \overrightarrow{0}$
$U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}, \quad V = U_1 \oplus U_2$

6.11 Bemerkung $U_1, \ldots, U_m$ Unterräume von V.
$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ (direkte Summe)

$$\Leftrightarrow \ (1)\ V = U_1 + \cdots + U_m = \{u_1 + \cdots + u_m : \ u_i \in U_i, i = 1, \ldots, m\}$$
$$(2)\ \forall i \in \{1, \ldots, m\} : \ U_i \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} U_j = \{\overrightarrow{0}\}$$

Dann gilt 6.10 entsprechend.

6.12 Definition $V\ K-VR,\ M \subseteq V$.

a) Der von M **erzeugte** oder **aufgespannte** Unterraum $\langle M \rangle_K$
ist die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen, die man mit Elementen aus M bilden kann:

$$\langle M \rangle_K \ = \ \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \ : \ v_i \in M, a_i \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\langle\emptyset\rangle_K := \{\vec{0}\}$
Falls $M = \{v_1, \dots, v_n\}$, so $\langle M\rangle_K = \langle v_1, \dots, v_n\rangle_K$
Insbesondere $\langle v\rangle_K = \{av : a \in K\}$

b) Ist $V = \langle M\rangle_K$, so heißt M ein **Erzeugendensystem** von V.
Gibt es ein endliches Erzeugendensystem von V, so heißt V **endlich erzeugbar** oder **endlich erzeugt**.

6.13 Bemerkung

a) $\langle M\rangle_K$ ist Unterraum von V, und zwar der kleinste, der M enthält.

b) U_1, U_2 Unterraum von V, $\langle U_1 \cup U_2\rangle_K = U_1 + U_2$

Beweis

a) $\langle M\rangle_K$
$M \subseteq \langle M\rangle_K \quad (v \in M: \ v = 1 \cdot v \in \langle M\rangle_K)$
Ist U Unterraum von V mit $M \subseteq U$
$v_1, \dots, v_n \in M, \ a_1, \dots, a_n \in K:$
$a_1 \underbrace{v_1}_{\in U} + \dots + a_n \underbrace{v_n}_{\in U} \in U \ \Rightarrow \ \langle M\rangle_K \subseteq U$

b) zum Nachrechnen. □

6.14 Beispiel

a) $V = K^n, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$V = \langle e_1, \dots, e_n\rangle_K$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $K[x]$ ist nicht endlich erzeugbarer K-Vektorraum:
Angenommen $\exists f_1, \dots, f_m \in K[x]$ mit $K[x] = \langle f_1, \dots, f_m\rangle_K$
Sei $n = \max_{i=1,m} \{Grad\ f_i\}$. Dann $x^{n+1} \notin \langle f_1, \dots, f_m\rangle_K$

c) $K[x] = \left\langle x^i : i \in \mathbb{N} \right\rangle$

d) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$?

Wenn ja, dann müsste es zu jedem $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ geeignete $x, y, z \in \mathbb{R}$ geben mit

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= a \qquad & x + 3y + 2z &= a \\ 2x + 2y + 3z &= c & -4y - z &= b - 2a \\ 3x + y + 4z &= c & -8y - 2z &= c - 3a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= a \\ -4y - z &= b - 2a \\ 0 &= c - 3a - 2(b - 2a) = a - 2b + c \end{aligned}$$

z.B. ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = U$

$U = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \ : \ a - 2b + c = 0 \right\}$

Ist $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in U$, d.h. $a - 2b + c = 0$

so wähle $z = 0, y = \frac{2a-b}{4}, x = a - 3y = \frac{4a-6a+3b}{4} = \frac{-2a+3b}{4}$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b\right)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \left(-1 + \frac{9}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$(-1)\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

6.15 Definition V K-Vektorraum. $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, wenn es $a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, mit $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = \overrightarrow{0}$
Gibt es solche Skalare nicht, so heißen $v_1, \ldots, v_n$ **linear unabhängig**.

$v_1, \cdots, v_n$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$
Sind $a_1, \cdots, a_n \in K$ und ist $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = \vec{0}$ so ist $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

6.16 Beispiele

a) $\vec{0}$ ist linear abhängig: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$v \neq \vec{0}$ ist linear unabhängig:
Ang. es ex. $a \neq 0$ mit $av = \vec{0}$
$v = 1 \cdot \overrightarrow{0} = (a^{-1} \cdot a) \cdot \overrightarrow{0} = a^{-1}(a \cdot \overrightarrow{0}) = a^{-1}(av) = a^{-1} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ Widerspruch.

b) Falls $v = \overrightarrow{0}$, so v, w linear abhängig.
$1 \cdot \overrightarrow{0} + 0 \cdot w = \overrightarrow{0}$
Falls $w = \overrightarrow{0}$, so v, w linear abhängig.
Falls $v, w \neq \overrightarrow{0}$: v, w linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in K : v = a \cdot w$ (d.h. $v \in \langle w \rangle_k$)
$\Leftrightarrow w \in \langle v \rangle_k$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.

$\frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^3$ (sind linear unabhängig)

$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a - 3b + 6c = 0 \quad a - 3b + 6c = 0$
$2a + b + 2c = 0 \quad 7b - 10c = 0$

Wähle z.B. $c = 1 \quad b = \frac{10}{7} \quad a = 3b - 6c = \frac{30}{7} - \frac{42}{7} = -\frac{12}{7}$

$-\frac{12}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{10}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Vektoren sind linear abhängig)

6.17 Lemma

V K-VR, $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

a.) $\overrightarrow{0} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig.

b.) *M linear abhängig, das heißt:* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j v_j = \overrightarrow{0}$ *mit* $a_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n$

so $\langle M \rangle_k = \langle M \setminus \{v_i\} \rangle_k$

c.) *M linear abhängig,* $M \subseteq N \subseteq V, N$ *endlich* $\Rightarrow N$ *linear abhängig.*

d.) *M linear unabhängig,* $L \subseteq M \Rightarrow L$ *linear unabhängig.*

Beweis:

a.) *O.B.d.A* $v_1 = \overrightarrow{0} : 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = \overrightarrow{0}$

b.) $a_1 v_1 + \ldots + \underbrace{a_i}_{\neq 0} v_i + \ldots + a_n v_n = \overrightarrow{0}$

$a_i v_i = -a_1 v_1 - \ldots - a_{i-1} v_{i-1} - a_{i+1} v_{i+1} - \ldots - a_n v_n$

$= \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (-a_j) v_j$

$\Rightarrow v_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \underbrace{(-a_i^{-1} a_j)}_{\in K} v_j \in \langle M \setminus \{v_i\} \rangle_K$ *Behauptung folgt jetzt mit 6.12.*

c.) ✓

d.) ✓

6.18 Lemma

$M \subseteq V, v \in M$, es gelte: $v \in \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$: Dann gilt

$\langle M \rangle_k = \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$

Beweis:

Klar. $\langle M \setminus \{v\} \rangle_K \subseteq \langle M \rangle_k$

Sei $w \in \langle M \rangle_K$

Dann existieren $v_1, \ldots, v_m \in M$ *mit* $w = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i v_i$ *mit* $a_i \in K$

Falls alle $v_i \neq v$, *so* $w \in \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$

O.B.d.A: $v_1 = v$ *Nach Voraussetzung existieren* $w_1, \ldots w_n \in M \setminus \{v\}$ *mit* $v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i w_i \;\; b_i \in K$

$w = a_1 v + \sum\limits_{i=2}^{m} a_i v_i$

$= a_i \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i w_i \right) + \sum\limits_{i=2}^{m} a_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i b_i) \underbrace{w_i}_{\in M \setminus \{v\}} + \sum\limits_{i=2}^{m} a_i v_I \in \langle M \setminus \{v\} \rangle_K$

6.19 Lemma

V K-VR $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

a.) *M linear abhängig* $\Leftrightarrow$ *es gibt (mindestens) ein* $v_i \in M$ *mit* $v_i \in \langle M \setminus \{v_i\} \rangle_K$

d.h. $\langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v_i\} \rangle_K$ *(6.18)*

b.) *M linear abhängig* $\Leftrightarrow$ *jeder Vektor* $v \in \langle M \rangle_K$ *hat genau eine Darstellung* $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ *mit* $c_i \in K$
(das heißt c_i *sind eindeutig durch* v *bestimmt)*

c.) *M linear unabhängig,* $v \notin \langle M \rangle_K \Rightarrow M \cup \{v\}$ *linear unabhängig.*

Beweis:

a.) $\Rightarrow$: 6.17b 6.18
$\Leftarrow$: $v_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j v_j \Rightarrow (-1) \cdot v_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_i v_j = \overrightarrow{0}$
M linear abhängig.

b.) $\Rightarrow$: $v \in \langle M \rangle_K$ *. Angenommen* $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) v_i = \overrightarrow{0}$ *(M ist linear unabhängig)*
$\Rightarrow d_i - c_i = 0$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *, falls* $d_i = c_i$

$\Leftarrow$: *Angenommen* $\overrightarrow{0} = a_1 v_1 + \ldots a_n v_n$
$\overrightarrow{0} = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_1$
$\Rightarrow a_i = 0, i = 1 \ldots n$*. M ist linear unabhängig.*

c.) $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + av = \overrightarrow{0}$ *(z.z.* $a_i = 0, a = 0$*)*
Angenommen $a \neq 0$
$av = \sum_{i=1}^{n} (-a_i) v_i$
$v = \sum_{i=1}^{n} (-a^{-1} a_i) v_I \in \langle M \rangle_K$ *Widerspruch zur Voraussetzung*
Also: $a = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$

Bemerkung: Man kann lineare Unabhängigkeit auch für unendliche Mengen von Vektoren definieren: M linear unabhängig $\Leftrightarrow$ *jede endliche Teilmenge von M ist linear unabhängig.*

6.20 Definition Sei V endlich erzeugter Vektorraum über K. Eine endliche Teilmenge B von V heißt **Basis** von V, falls:

(1) $V = \langle B \rangle_K$

(2) B ist linear unabhängig

$V = \{\overrightarrow{0}\}$: $\emptyset$ ist Basis.

6.21 Beispiel

a.) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis von K^n

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$; das heißt $K^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K$

Ebenso folgt lineare unabhängigkeit.

b.) $V = \{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i : a_i \in K\} \subseteq K[x]$, V K -Vektorraum.

$\{1, x, x^2, x^3\}$ Basis

$\{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x\}$ auch Basis (Übungsaufgabe)

6.22 Satz (Existenz von Basen)

Sei V ein endlicher erzeugter Vektorraum. Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von V eine Basis.

Beweis:

$M \subseteq V$, M endlich, $\langle M \rangle_K = V$

Ist M linear unabhängig, so ist M Basis. Ist M linear abhängig, so existieren nach 6.19a) ein $v \in M$ mit $\langle M \rangle_K = \langle M \setminus \{v\} \rangle_k$

Nach endlich vielen Schritten erhält man so die Basis von V.

6.23 Lemma

V endlicher erzeugter K-VR, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

Sei $\overrightarrow{0} \neq w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Ist $a_j \neq 0$, so ist $\left(B \setminus \{v_j\}\right) \cup \{w\}$ Basis von V.

***Beweis**:*

(1) $\left\langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \right\rangle_K = V$:

$a_j v_j = w - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i v_i, \quad v_j = a_j^{-1} w - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} (a_j^{-1} a_i) v_i \in \left\langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \right\rangle_K$

6.18: $\langle (B \setminus \{v_i\}) \cup \{w\} \rangle_K = \langle B \cup \{w\} \rangle_K = V$

(2) lineare unabhängigkeit:

$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_i v_i + cw = \overrightarrow{0}$

$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_i v_i + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i v_i = \overrightarrow{0}$

$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} (c_i + c a_i)\, v_i + c a_j v_j = \overrightarrow{0}$

B linear unabhängig.

$c a_j = 0$

$c_i \neq c a_i = 0 \ \forall i \neq j$

$a_j \neq 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow c_i = 0 \ \forall i \neq j$

$\left(B \setminus \{v_j\}\right) \cup \{w\}$ linear unabhängig.

6.24 Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)
V endlich erzeugter K-VR, B Basis von V.
Sei M endliche linear unabhängige Teilmenge von V.
Dann existiert $C \subseteq B$ mit $|C| = |M|$, so dass

$$(B \setminus C) \cup M \text{ eine Basis ist. } (\text{Insb. } |M| \leq |B|)$$

Beweis Sei $|M| = k$
Induktion nach k.
$k = 0 : \surd$
$k - 1 \to k :$
$M = \tilde{M} \cup \{w\}, \ \left|\tilde{M}\right| = k - 1$
Nach IV existiert $\tilde{C} \subseteq B$ mit $\left|\tilde{M}\right| = \left|\tilde{C}\right|$, so dass

$$\left(B \setminus \tilde{C}\right) \cup \tilde{M} \text{ Basis von } V \text{ ist.}$$

$w = \sum\limits_{u \in B \setminus \tilde{C}} a_u u + \sum\limits_{v \in \tilde{M}} a_v v$
Mindestens ein a_u für ein $u \in B \setminus \tilde{C}$ ist $\neq 0$:
Sonst $w \in \left\langle \tilde{M} \right\rangle$. Dann M linear abhängig. 6.19a) ↯
Wende 6.23 an. Tausche w gegen u aus
$C = \tilde{C} \cup \{u\}$
$(B \setminus C) \cup M$ Basis von V. □

6.25 Korollar *V endlich erzeugter K-VR.*

a) Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente

b) Jede linear unabhängige Menge von V ist endlich

*c) **Basisergänzungssatz:** Jede linear unabhängige Menge in V lässt sich zu einer Basis von V erweitern.*

Beweis a) 6.24 anwenden mit B an Stelle von $\tilde{B}$, $\left|\tilde{B}\right| \leq |B|$.
Vertausche Rollen von $\tilde{B}$ und B: $|B| \leq \left|\tilde{B}\right|$.

$$\left|\tilde{B}\right| = |B|$$

b) Wenn M unendliche linear unabhängige Menge: Ist $|B| = n$, so wähle $M_0 \subseteq M$ mit $|M_0| = n + 1$, M_0 wäre linear abhängig. Widerspruch.

c) M linear unabhängige Menge. Wähle Basis B von V.
6.24: $\exists\, C \subseteq B$ mit: $(B \setminus C) \cup M$ Basis von V. □

6.26 Korollar *V endlich erzeugbarer K-VR, U Unterraum von V.*
Dann existiert Unterraum W von V mit

$$V = U \oplus W$$

Beweis Wähle Basis $u_1, \cdots, u_m$ von U.
ergänze diese nach 6.25c) durch $w_1, \cdots, w_l$ zu Basis V. Setze $W = \langle w_1, \cdots, w_l \rangle_K$.
Dann ist $V = U \oplus W$
Klar ist: $V = U + W$.
$v \in U \cap W: \; v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{j=1}^{l} b_j w_j \quad U \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$
$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{l} \left(-b_j\right) w_j = \overrightarrow{0}$
linear unabhängig $\{u_1, \cdots, u_m, w_1, \ldots, w_l\}: \; a_i = 0 \; \forall i: \; v = \overrightarrow{0}$ □

6.27 Definition a) V endlich erzeugter VR, B Basis von V, $|B| = n$, so heißt n die **Dimension** von V, $dim(V) = n$

b) Ist V nicht endlich erzeugbar, so heißt V **unendlich dimensional**

6.28 Korollar *$dim(V) = n, \; B \subseteq V, \; |B| = n$.*

a) Ist B linear unabhängig, so ist B Basis von V.

b) Ist $\langle B \rangle_K = V$, so ist B Basis von V.

Beweis a) Folgt aus 6.25 a) c)

b) Folgt aus 6.22 und 6.25 a) □

6.29 (Beispiel) a) K^n, K Körper.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$e_1, \ldots, e_n$ <u>Basis</u> von K^n.

$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$

$dim(K^n) = n$. $\quad e_1, \ldots, e_n$: **kanonische Basis** von K^n

b) In K^3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis.

Angenommen: $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$a + c = 0, b + c = 0, c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$
Linear unabhängig $\underbrace{\Rightarrow}_{6.28}$ Basis:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1 - a_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_2 - a_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $K[x]$ ist unendlich dimensionaler VR. (6.14.b)

d) $V = \mathbb{R}^4 \;\; U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$dim(U) = 2$, da u_1, u_2 linear unabhängig.
ergänze u_1, u_2 zu Basis von V.
1. Möglichkeit:
e_1, e_2, e_3, e_4 kanonische Basis von V.
$u_1 = e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 1e_4$
6.23: u_1, e_2, e_3, e_4 Basis
$u_2 = a \cdot u_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3 + d \cdot e_4$
6.23: u_1, u_2, e_2, e_4
Basis von $V = \mathbb{R}^4$
2. Möglichkeit
6.19c): M linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_K$
$\Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig.

$U = \{ \begin{pmatrix} a \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$

$e_1 \notin U = \langle u_1, u_2 \rangle_K$ 6.19c: e_1, u_1, u_2 linear unabhängig.

$\langle e_1, u_1, u_2 \rangle = \{ \begin{pmatrix} a + c \\ 2a + 2b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $e_4 \notin \langle e_1, u_1, u_2 \rangle$ $(b = 0, a = 0, c = 0)$

6.19c: u_1, u_2, e_1, e_4 linear unabhängig, also Basis.

6.30 Satz

V endlich dimensionaler VR; $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist Basis von V

(2) B ist maximal linear unabhängige Menge in V d.h. für jedes $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig.

(3) B ist minimales Erzeugendensystem von V.
(d.h. für jedes $w \in B$ gilt: $\langle B \setminus \{w\} \rangle_K \neq V$)
Bew:
(1) $\Rightarrow$ (2): Folgt aus 6.25a),c.)
(2) $\Rightarrow$ (1): 6.19c.)
(1) $\Rightarrow$ (3): 6.19a.)
(3) $\Rightarrow$ (1): 6.17b.)

6.31 Definition V n-dimensionaler K-VR; $B = (v_1, \ldots, v_n)$ (geordnete Basis)

Nach 6.19b) hat jedes $v \in V$ genau eine Darstellung $v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i$

wobei die c_i eindeutig durch v bestimmt $(c_1, \ldots, c_n)$ Koordinaten von v bezüglich B

v_i hat Koordinaten $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{=i}, 0, \ldots, 0)$

6.32 Bsp

a.) $V = K^n$

$B = (e_1, \ldots, e_n)$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

kanonische Basis

$$\text{Koordinaten von} \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = v$$

bezüglich $(e_1 \ldots e_n)$

$v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$

<u>kartesische Koordinaten</u>

b.) $V = \mathbb{R}^3$, $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + a_3 \\ a_2 + 2a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_1 + a_3 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 &= -a_2 \\ -2a_2 + a_3 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_3 &= 2a_2 \\ a_2 + 4a_2 &= 0 \\ 5a_2 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

B linear unabhängig. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, B ist Basis.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Koordinaten von e_1 bezüglich B:

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$
$b_1 + b_2 = 1$
$2b_1 + b_3 = 0$
$b_2 + 2b_3 = 0$
$b_1 = 1 - b_2,\ 2 - 2b_2 + b_3 = 0,\ b_2 + 2b_3 = 0,\ b_3 = 2b_2 - 2,\ b_2 + 4b_2 - 4 = 0,\ 5b_2 = 4,\ b_2 = \frac{4}{5}$
$b_3 = \frac{8}{5} - 2 = -\frac{2}{5},\ b_1 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
Koordinaten von e_1 bezüglich B sind $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$

6.33 Satz
Sei V K-VR , dim(V)= n

a.) Sei U Unterraum von V. Dann ist dim$(U) \leq n$

b.) Sind U, W Unterräume von V mit $U \subseteq W$ und dim(U) = dim(W), so ist $U = W$.

Beweis:

a.) ergänze Basis von U zu Basis von V (6.25c)

b.) dim(U) = dim(W) und $U \subseteq W \Rightarrow$ Basis von U = Basis von W
$\Rightarrow U = W$

6.34 Satz (Dimensionsformel)
Seien U_1, U_2 Unterräume von V.
dim$(U_1 + U_2)$ = dim(U_1) + dim(U_2) − dim$(U_1 \cap U_2)$
Beweis:
$U_1, \ldots, U_k$ Basis von $u_1 \cap u_2$
ergänze zu Basis von $U_1 :\ u_1, \ldots, u_k,\ v_{k+1}, \ldots, v_l$
$U_2 : u_1, \ldots, u_k\ w_{k+1}, \ldots, w_m$
(WHK, 9.23)
Dann ist $u_1, \ldots, u_K, v_{k+1} \ldots v_l$
$w_{k+1} \ldots w_m$
Basis von $U_1 + U_2$ (Nachrechnen!)

6.35 Beispiel

a.) $K = \mathbb{Z}_3, V = (\mathbb{Z}_3)^3$
$U_1 = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x + y + z = 0, x, y, z, \in \mathbb{Z}_3\},$
$U_2 = \{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_3\}$
$= \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{Z}_3}$ Unterraum von V

U_1 Unterraum von V: $a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}\in U_1, ax+ay+az=a\underbrace{(x+y+z)}_{=0}=0$

falls $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U_1 \qquad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in U_1$

$\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\in U_1$, da $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)=0$

$U_1\cap U_2=?$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U_1\cap U_2 : x+y+z=0 \;\; x=y=z$

$\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}\in U_1\cap U_2 : x+x+x=0$

$U_2\subseteq U_1,\; U_1\cap U_2=U_2, U_1+U_2=U_1$
$dim(U_1+U_2)=dim(U_1)$ (hier in diesem Bsp.)
$U_1\neq V_1,\;\; dim(U_1)\leq 2$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in U_1$
linear unabhängig.

$dim(U_1)=2$
$dim(\underbrace{U_1}_{=2}+U_2)=\underbrace{dim(U_1)}_{=2}+\underbrace{dim(U_2)}_{=1}-\underbrace{dim(U_1\cap U_2)}_{=1}=2$

b.) $K=\mathbb{Z}_2,\; V=(\mathbb{Z}_2)^3$
U_1, U_2 wie oben $(x,y,z\in\mathbb{Z}_2)$
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=U_1\cap U_2 : x+y+z=0,\; x=y=z,\; x+x+x=0$

$U_1\cap U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\; U_1+U_2=(\mathbb{Z}_2)^3$
$dim(U_1+U_2)=\underbrace{dim(U_1)}_{=2}+\underbrace{dim(U_2)}_{=1}-\underbrace{dim(U_1\cap U_2)}_{=0}=3$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ Basis von U_1

§7 Vektorräume mit Skalarprodukt

$\underbrace{||v||}_{\text{Länge von } v} \;=\; \sqrt{x_1^2\;+\;x_2^2}$ (Pythagoras)
Abstand von v und w:

$$d(v,w) = ||v+w|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned}\underline{\text{Pythagoras:}}\ ||v-w||^2 &= ||v||^2 \sin^2(\varphi) + (||w|| - ||v|| \cos(\varphi))^2 \\ &= ||v||^2 \sin^2(\varphi) + ||w||^2 - 2\,||w||\,||v|| \cos(\varphi) + ||v||^2 \cos^2(\varphi) \\ &= \underline{||v||^2 + ||w||^2 - 2\,||v||\,||w|| \cos(\varphi)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||v-w||^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 &= x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 \\ &= \underline{||v||^2 + ||w||^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 = ||v||\,||w|| \cos(\varphi)$$

(Standard-)Skalarprodukt von $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

für den Winkel φ gilt:

$$cos(\varphi) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{||v|| \cdot ||w||}$$

7.1 Definition $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Das **(Standard-)Skalarprodukt** von v und w ist $(v|w) := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$

Es gilt:

(1) $(v|w) \geq 0$, Ist $v \neq 0$, so $(v|w) > 0$

(2) $(v|w) = (w|v)$

(3) $(u|v+w) = (u|v) + (u|w)$
$(u|av) = a \cdot (u|v)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$

7.2 Definition $V\ \mathbb{R} - Vektorraum.$

Abb. (.|.) $\begin{cases} V \times V \longrightarrow R & \text{heißt } \textbf{Skalarprodukt} \text{ auf} V \\ (v,w) \longmapsto (v|w) \end{cases}$

falls die Eigenschaften

(1) Definitheit
(2) Symmetrie
(3) Linearität im 2. Argument

für alle $u, v, w \in V, a \in \mathbb{R}$ gelten.
V heißt dann **Skalarproduktraum** oder **Euklidischer Vektorraum**.
Es gilt auch:
(4) $(u+v|w) = (u|w) + (v|w), (au|v) = a(u|v)$ (Linearität im 1. Argument) (Folgt aus (2),(3))

7.3 (Beispiele)

a) Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : (v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ist Skalarprodukt im Sinne von Definition 7.2.

b) $C[a,b] = \{f : f \text{ stetig}, f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}$-Vektorraum
Def. $(.|.)$ auf $C[a,b]$ $\quad (f|f) = \int\limits_a^b f^2(t)dt$

$$(f|g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$$

7.4 Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)
V Euklid. VR.
$(v|w)^2 \leq (v|v) \cdot (w|w)$
Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis $w = \vec{0}$ $\surd$ auf beiden Seiten 0.
$[(v|\vec{0}) = (v|0 \cdot \vec{0}) \underbrace{=}_{(3)} 0 \cdot (v|\vec{0}) = 0]$

$w \neq \vec{0} \qquad a := \frac{(v|w)}{\underbrace{(w|w)}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (v - aw|v - aw) \underbrace{=}_{(3),(4)} (v|v) - a(v|w) - a(w|w) + a^2(w|w)$$

$$= (v|v) - 2\frac{(v|w)^2}{(w|w)} + \frac{(v|w)^2}{(w|w)} = (v|v) - \frac{(v|w)^2}{(w|w)}$$

$\frac{(v|w)^2}{(w|w)} \leq (v|v) \underbrace{\Longrightarrow}_{(w|w)>0} (v|w)^2 \leq (v|v)(w|w)$

$$\text{Gleichheit} \Rightarrow 0 = (v - aw|v - aw) \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} v - aw = \vec{0}$$
$$\Rightarrow v = aw$$
$$\Rightarrow v, w \text{ linear abhängig}$$

v, w linear abhängig $\Rightarrow$ $v = bw$ für ein $b \in \mathbb{R}$
$(v|w)^2 = (bw|w)^2 = b^2(w|w)^2 = (bw|bw)(w|w) = (v|v)(w|w) \Rightarrow$ Gleichheit $\square$

7.5 Definition V Euklid. VR

a) für $v \in V$ ist die **(Euklidische) Norm** def. durch

$$||v|| = + \sqrt{(v|v)}$$

(„Länge" von v)

b) für $v, w \in V$ ist der **Euklidische Abstand** def. durch

$$d(v, w) := ||v - w||$$

7.6 (Bsp) a) Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

b) $V = C[a, b] \quad ||f|| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$

7.7 Satz
V Euklid. VR mit Euklid. Norm $||.||$
Dann gilt für alle $v, w \in V$ für alle $a \in \mathbb{R}$:

a) (Definitheit)
$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \overrightarrow{0}$

b) (absolute Homogenität)
$||av|| = |a| \cdot ||v||$

c) (Dreiecksungleichung)
$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

d) $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2(v|w)$

e) (Parallelogramm-Gleichung)
$||v + w||^2 + ||v - w||^2 + 2\left(||v||^2 + ||w||^2\right)$

f) (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung)
$|\,||v|| - ||w||\,| \leq ||v - w|| \leq ||v|| + ||w||$

Beweis a) b) $\surd \quad ||av|| = + \sqrt{(av|av)} = + \sqrt{a^2(v|v)} = |a| \sqrt{(v|v)}$
c) d) $||v + w||^2 = (v + w|v + w) = (v|v) + (w|w) + 2(v|w)$
$\underbrace{\leq}_{7.4} (v|v) + (w|w) + 2\sqrt{(v|v)(w|w)} = (||v|| + ||w||)^2 \quad ||v|| = \sqrt{(v|v)}$
e) folgt aus d), da $||v - w||^2 = ||v||^2 + ||-w||^2 + 2(v| - w) = ||v|| + ||w|| - 2(v|w)$
existiert genau ein $\phi \in [0, \pi]$ mit
$\frac{(v|w)}{||v|| \cdot ||w||} = \cos(\phi)$
$(v|w) = ||v||\,||w|| \cos(\phi)$ (wgl.$\mathbb{R}^2$) □

7.8 Definition V Euklidischer VR:

a.) $v, w \in V, v \neq \overrightarrow{0} \neq w$, so ist der Winkel zwischen v und w definiert durch:
$\phi = \arccos\left(\frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|}\right) \in [0, \pi]$ keine orientierten Winkel!

b.) v, w **orthogonal** (senkrecht), falls $(v|w) = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2$. Insbesondere ist $\overrightarrow{0}$ orthogonal zu allen Vektoren.

c.) $M \subseteq V$, so heißt:
$M^{\perp} = \{v \in V : (v|w) = 0 \ \forall w \in M\}$
Orthogonalraum zu M.
$M^{\perp}$ ist Unterraum von V (selbst wenn M kein Unterraum ist)
$\{\overrightarrow{0}\}^{\perp} = V,\ V^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = M^{\perp}$

7.9 Bemerkung v, w orthogonal $\Rightarrow \|v + w\|^2 = |v|^2 + |w|^2$ (Pythagoras)
(folgt aus 7.7d.)

7.10 Beispiele

a.) $\mathbb{R}^n$ Standard-Skalarprodukt.
$e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis $(e_i|e_j) = 0$ für $i \neq j$
$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Winkel zwischen v und w.
$(v|w) = 6, \|v\| = \sqrt{6}, \|w\| = \sqrt{24}$
$\frac{(v|w)}{\|v\|\|w\|} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{1}{2}, \phi = \frac{\pi}{3} = 60°$

b.) $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, v \neq \overrightarrow{0}$
$\{v\}^{\perp} = \{r \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

c.) Orthogonale Relationen:
$(\sin(mt)|\sin(nt)) = \int\limits_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = 0,\ m \neq n$
$\sin(mt), \sin(nt)$ sind orthogonal für $m \neq n$.

7.11 Definition a.) M heißt **Orthonormalsystem**, falls $\|v\| = 1$, für alle $v \in M$ und $(v|w) = 0$ für alle $v, w \in M, r \neq w$

b.) Ist V endlich dimensioniert, so heißt M **Orthonormalbasis** (ONB) von V, falls M ein Orthonormalsystem und gleichzeitig Basis von V.

7.12 Satz
a.) Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig.

b.) $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ sei ein Orthonormalsystem , $v \in V$, so ist $v - \sum\limits_{i=1}^{m} \underbrace{(v|v_i)}_{\in\mathbb{R}} v_i \in M^{\perp}$

Beweis:
a.) Angenommen $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i v_i = \overrightarrow{0}$

$0 = (v_j | \sum_{i=1}^{m} c_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i (v_j|v_i) = c_j (v_j|v_j) = c_j$
gilt für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$

c.) Sei $v_j \in M$ $(v_j|v - \sum_{i=1}^{m}(v|v_i)v_i) = (v_j|v) - \sum_{i=1}^{n}(v_j|(v|v_i)v_i) = (v_J|v) - \sum_{i=1}^{m}(v|v_i)(v_j|v_i) = (v_j|v) - (v|v_j) = 0$

7.13 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

$M = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *linear unabhängige Teilmenge des Euklidischen Vektorraums V. Dann gibt es Orthonormalsystem* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *mit* $\langle w_1, \ldots, w_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots, v_i\rangle_{\mathbb{R}}$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$ *Insbesondere jeder endlich dimensionale Euklidische Vektorraum besitzt ONB.*

Beweis:
$w_1 \neq \overrightarrow{0}$
$v_1 = \frac{1}{||w_1||} w_1, \ldots,\ ||v_1|| = \sqrt{\left(\frac{1}{||w_1||}w_1, \frac{1}{||w_1||}w_1\right)} = \sqrt{\frac{1}{||w_1||^2}(w_1|w_1)} = 1$
$\langle v_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_1\rangle_{\mathbb{R}}$
Sei schon Orthonormalsystem $\{v_1, \ldots, v_i\}$ $(i < m)$
bestimmt mit $\left\langle v_1, \ldots, v_j\right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle w_1, \ldots, w_j\right\rangle_{\mathbb{R}}$ *für alle* $j = 1, \ldots, i$
Setze $v'_{i+1} = w_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}(v_j|w_{i+1})v_j$
Da $w_{i+1} \notin \langle w_1, \ldots, w_i\rangle$ *ist* $v'_{i+1} \neq \overrightarrow{0}$
(sonst $w_{i+1} \in \langle v_1, \ldots, v_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_1, \ldots, w_i\rangle_{\mathbb{R}}$ ↯*)*
$v_{i+1} = \frac{1}{||v'_{i+1}||}v'_{i+1},\ ||v_{i+1}|| = 1, (v_{i+1}|v_j) = 0$ *für* $j = 1, \ldots, i$
$\langle v_1, \ldots, v_{i+1}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_1, \ldots, v_{i+1}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}\rangle_{\mathbb{R}}$

7.14 (Bsp)

a) $e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt ist ONB

b) $V = \mathbb{R}^3$ Standardskalarprodukt

$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig

$||w_1|| = \sqrt{3},\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v'_2 &= w_2 - (v_1|w_2)v_1 \\ &= \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|v_2'\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3},\ v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_3' &= w_3 - (v_1|w_3)v_1 - (v_2|w_3)v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \|v_3'\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$v_3 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

v_1, v_2, v_3 ONB von $\mathbb{R}^3$
$\langle v_1\rangle = \langle w_1\rangle, \langle v_1, v_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle, \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle w_1, w_2, w_3\rangle = \mathbb{R}^3$

7.15 Bemerkung Sei V Euklidischer VR und Skalarprodukt $(.|.)$
Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ ONB von V.

a) $v, w \in V,\ v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ w = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$

$$(v|w) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (v_i|v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

b) $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad (v|v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (v_i|v_j) = a_j$

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) v_i}$$

7.16 Satz
V endlich dimensionaler Euklid. VR, U Unterraum von V.

a) $V = U \oplus U^\perp$
insbesondere $dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V)$

b) $(U^\perp)^\perp = U$

Beweis a) Sei $w_1, \dots, w_m$ Basis von U. ergänze zu Basis $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ von V. Wende hierauf Gram-Schmidt an:

$\longrightarrow$ ONB $v_1, \dots, v_m$ von V
$< v_1, \dots, v_m >=< w_1, \dots, w_m >= U$
$< v_{m+1}, \dots, v_n >\subseteq U^\perp \quad V = U + U^\perp$
Ist $u \in U \cap U^\perp$, so $(u|u) = 0$, also $u = \vec{0}$
$U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$
$V = U \oplus U^\perp$

b)

$$U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

$$\begin{aligned} dim\left((U^\perp)^\perp\right) &\overbrace{=}^{a)} dim(V) - dim(U^\perp) \\ &= dim(V) - (dim(V) - dim(U)) \\ &= dim(U) \end{aligned}$$

6.33 b): $U = (U^\perp)^\perp$
Speziell im $\mathbb{R}^3$: Vektorprodukt □

7.17 Definition (Vektorprodukt)

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Vektorprodukt $v \times w = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

7.18 Satz

a) $((v \times w)|v) = ((v \times w)|w) = 0$*, d.h.* $v \times w$ *ist orthogonal zu* v *und* w*.*

b) $v \times w = -(w \times v)$

c) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w,$

$u \times (av) = a(u \times v), a \in \mathbb{R}$
Ebenso in der 1. Komponente

d) $v \times w = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v, w$ *linear abhängig*

e) $v, w \neq \overrightarrow{0}, \varphi$ *Winkel zwischen* v, w
$||v \times w|| = ||v|| \, ||w|| \sin(\varphi)$ *= Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten* v *und* w*.*

Beweis a)b)c) nachrechnen
e)

$$\begin{aligned} ||v \times w||^2 = ((v \times w)|(v \times w)) &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= ||v||^2 \, ||w||^2 - (v|w)^2 \\ &= ||v||^2 \, ||w||^2 - ||v||^2 \, ||w||^2 \cos^2(\varphi) \\ &= ||v||^2 \, ||w||^2 (1 - \cos^2(\varphi)) \\ &= ||v||^2 \, ||w||^2 \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

d) folgt aus e) □

§8 Lineare Abbildungen

„Strukturerhaltende“ Abbildung in Vektorräumen

8.1 Definition

a) V, W K-Vektorräume. Abbildung $\alpha : V \to W$ heißt **lineare Abbildung** (oder **VR-Homomorphismus**), wenn:
$\alpha(v_1 \underbrace{+}_{\text{Add in } V} v_2) = \alpha(v_1) \underbrace{+}_{\text{Add in } W} \alpha(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V$ (Additivität)
$\alpha(a \cdot v) = a \cdot \alpha(v)\ \forall v \in V, a \in K$ (Homogenität)

b) Ist $\alpha : V \to W$ lineare Abbildung, die bijektiv ist, so heißt α **VR-Isomorphismus**,V und W heißen **isomorph**, $V \cong W$

8.2 Bemerkung $\alpha : V \to W$ lin. Abb.

a) $\alpha(\overrightarrow{0}_v) = \overrightarrow{0}_w$

b) $\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \alpha(v_i)$

8.3 (Beispiele)

a) $id_v : V \to V$ lin. Abb.
Allgem. Wähle $b \in K$. $\quad \alpha : \begin{cases} V \to V \\ v \mapsto bv \end{cases}$ lin Abb.

b) **Nullabbildung** $\alpha : V \to W \quad \alpha(v) = \overrightarrow{0},\ \forall v \in V$ lin. Abb.

c) Drehung um Nullpunkt um Winkel φ ist eine lin. Abb. (gegen den Uhrzeigersinn)

d) $\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$
Spiegelung an der Ebene $\langle e_1, e_2 \rangle$
Nachrechnen: σ lin. Abb.

e) $V = U \oplus W$
$\pi_{u,w}(u + w) = u$ (Projektion von V auf U entlang W)
$w \in W : \pi_{u,w}(\overrightarrow{0} + w) = \overrightarrow{0} \quad \pi_{u,w}(w) = \{\overrightarrow{0}\}$
$u \in U : \pi_{u,w}(u + \overrightarrow{0}) = u \quad \pi_{u,w}(u) = id_u$

f) $a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \end{cases}$ lin. Abb.

g) V Euklid. VR, $\alpha : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$ <u>keine</u> lin. Abb.
Sonst $\|v_1 + v_2\| = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2) = \|v_1\| + \|v_2\|$, gilt jedoch i.A. nicht!
z.B.: $v_1 \neq \vec{0},\ v_2 = -v_1$

h) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\alpha(x) = x^2$ nicht linear, denn
$\alpha(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \neq x_1^2 + x_2^2 = \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$

i) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\alpha(x) = x + 1$ nicht linear, denn
$\alpha(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1 \neq x_1 + x_2 + 2 = \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$

j) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ differenzierbar$\}$ VR $\begin{cases} V \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\ f \mapsto f' \end{cases}$ linear,
da $(f + g)' = f' + g'$ und $(af)' = af', \forall a \in \mathbb{R}$.

8.4 Satz
$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung
Ist U Unterraum von V, so ist $\alpha(U) = \{\alpha(u) : u \in U\}$ ein Unterraum von W.
Insbesondere ist $\alpha(V)$ Unterraum von W.
Ist U endlich dimensional, so ist $dim(\alpha(U)) \leq dim(U)$.

Beweis $\alpha(\underbrace{u_1}_{\in U}) + \alpha(\underbrace{u_2}_{\in U}) = \alpha(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U}) \in \alpha(U),\ a \cdot \alpha(u) = \alpha(\underbrace{a \cdot u}_{\in U}) \in \alpha(U)$
U endl. dim. Sei $u_1, \ldots, u_k$ Basis von U
$\alpha(U) = \langle \alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_k) \rangle :$
$u \in U,\ u = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i \quad \underline{\alpha(u)} = \alpha(\sum_{i=1}^{k} c_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \underline{\alpha(u_i)}$
$\{\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_k)\}$ enthält Basis von $\alpha(U), dim(\alpha(U)) \leq k = dim(U)$ □

8.5 Satz
$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung

*a) $ker(\alpha) = \{v \in V : \alpha(v) = \vec{0}\}$ **Kern** von α; ist Unterraum von V*

b) $ker(\alpha) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \alpha$ ist injektiv

c) Ist α bijektiv, so ist $\alpha^{-1} : W \to V$ <u>lineare</u> (bijektive) Abb.

Beweis (Beweist man wie für Gruppen)

b) $\Rightarrow$: Ang. $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$. Z.z. $v_1 = v_2$
$\vec{0} = \alpha(v_1) - \alpha(v_2) = \alpha\,\underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in ker(\alpha)}$
$\underbrace{\Rightarrow}_{Vor.} v_1 - v_2 = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2$ □

8.6 (Beispiel) a) $\alpha : \begin{cases} R^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$ lin. Abb.

$$\alpha(e_2) = \alpha\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha(e_3) = \alpha\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\alpha(\underbrace{\langle e_2, e_3\rangle}_{U}) = \langle \alpha(e_2), \alpha(e_3)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$dim(U) = 2,\ dim(\alpha(U)) = 1$

$$\alpha(2e_2 - e_3) = 2\alpha(e_2) - \alpha(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, 2e_2 - e_3 \in ker(\alpha)$$

b) $V = U \oplus W \quad \pi_{u,w}(u + w) = u, \quad ker(\pi_{u,w}) = w$

8.7 Satz

V, W K-VR, $dim(V) = n$
Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V
Seien $w_1, \dots, w_n$ (nicht notwendig verschiedene) Vektoren aus W.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\alpha : V \to W$$

mit $\alpha(v_i) = w_i,\ i = 1, \dots, n.$
Lin. Abb. sind durch die Bilder einer Basis festgelegt.

Beweis Sei $\alpha : V \to W$ lin. Abb. mit $\alpha(v_i) = w_i,\ i = 1, \dots, n.$
Dann ist $\alpha(v)$ für jeden $v \in V$ festgelegt.
$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,\ \alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$
Umgekehrt: Suche lin. Abb. α mit $\alpha(v_i) = w_i$
Def. $v = \sum c_i v_i$, def. $\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ (wohldef.)
Dann: $\alpha(v_i) = w_i$ $\surd$
α ist lin. Abb.
$v = \sum c_i v_i, \qquad v' = \sum d_i v_i$
$\alpha(v + v') = \alpha\left(\sum(c_i + d_i)v_i\right) = \sum(c_i + d_i)w_i = \sum c_i w_i + \sum d_i w_i = \alpha(v) + \alpha(v')$ ebenso:
$\alpha(av) = a \cdot \alpha(v)$ □

8.8 (Beispiel) $V = R^2$, Drehung von e im Nullpunkt um Winkel $\varphi, \alpha : V \to V$

$$\alpha(e_1) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \quad \alpha(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \alpha(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1\alpha(e_1) + x_2\alpha(e_2) + \begin{pmatrix}x_1 \cos(\varphi) - x_2 \sin(\varphi)\\ x_1 \sin(\varphi) + x_2 \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

8.9 Satz

$\alpha : V \to W$ lin. Abb., $dim(V) = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V

a) α ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n)\}$ ist linear unabhängig *b)* α *ist surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\langle\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n)\rangle_K \;=\; W$

c) α *ist bijektiv* $\Leftrightarrow$ $\{\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n)\}$ *Basis von W*

Beweis a) „$\Rightarrow$“: Ang. $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha(v_i) \;=\; \overrightarrow{0}$ Z.z. $c_1 = \cdots = c_n = 0$

$\Rightarrow \alpha\,(\sum c_i v_i) \;=\; \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \sum c_i v_i \in ker(\alpha) \underbrace{=}_{\alpha \text{ inj. } 8.15b} \{\overrightarrow{0}\}, \sum c_i v_i \;=\; \overrightarrow{0} \underbrace{\Rightarrow}_{v_1,\dots,v_n \text{ lin. unabh.}} c_1 = \cdots = c_n = 0$

„$\Leftarrow$“: Z.z. $ker(\alpha) = \{\overrightarrow{0}\}$ $v \in ker(\alpha)$

$v = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i,\; \overrightarrow{0} = \alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} d_i\alpha(v_i) \;\Rightarrow\; d_1 = \cdots = d_n = 0 \;\Rightarrow\; v = \overrightarrow{0}$

b) $\alpha(V) = \langle\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n)\rangle_K$
α surjektiv $\Leftrightarrow$ $\alpha(V) = W$

c) folgt aus a) und b) □

8.10 Korollar *Seien V, W K-VR mit dim(V) = dim(W).*
Dann ist $V \cong W$

Beweis $v_1,\dots,v_n$ Basis von V
$w_1,\dots,w_n$ Basis von W
8.7. es ex. lin. Abb. $\alpha : V \to W$ mit $\alpha(v_i) = w_i$
8.9.c): α bijektiv. Isomorphismus $V \cong W$. □

8.11 Korollar *V n-dim. K-VR mit Basis* $B = (v_1,\dots,v_n)$ *(geordnet)*

$$K_B : \begin{cases} V \to K^n \\ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{ein VR-Isomorphismus } V \cong K^n$$

Beweis K_B ist die eindeutige lineare Abbildung $v_i \to e_i$ □

8.12 Satz
V, W K-VR

a) $\alpha,\beta : V \to W$ *lineare Abb., so auch* $\alpha + \beta$ *linear und* $k\alpha$ $(k \in K)$ *linear.*

b) $\alpha : V \to W$ *linear*
$\beta : W \to U$ *linear*
$\Rightarrow \beta \circ \alpha : V \to U$ *linear. (Nachrechnen!)*

8.13 Definition V endl. dim. K-VR, $\alpha : V \to W$ linear.

$dim(\alpha(V)) = \underbrace{rg(\alpha)}_{\textbf{Rang} \text{ von } \alpha} \;\leq\; dim(V)$

8.14 Satz (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)
V, W K-VR, $\alpha : V \to W$ *linear, V endl. dim.*
Dann: $dim(V) = dim(ker(\alpha)) + rg(\alpha)$

Beweis 6.26: es ex. Unterraum U mit $V = ker(\alpha) \oplus U$
$ker(\alpha) \cap U = \{\overrightarrow{0}\} \;\Rightarrow\; ker(\alpha|_U) = \{\overrightarrow{0}\}$
$\alpha|_U$ ist injektiv $\Rightarrow\; dim(U) = dim(\alpha(U))$
$\alpha(U) = \alpha(V)$
$v \;=\; v_0 + U, \alpha(v) = \alpha(v_0) + \alpha(U)$
$rg(\alpha) = dim(\alpha(U)) = dim(U)$
$\underbrace{\Rightarrow}_{5.34} dim(ker(\alpha)) + dim(U) = dim(ker(\alpha)) + rg(\alpha)$ □

8.15 Korollar *V, W endl. dim. VR $dim(V) = dim(W)$, $\alpha : V \to W$ lin. Abb.*
α ist injektiv $\Leftrightarrow$ α ist surjektiv $\Leftrightarrow$ α ist bijektiv

Beweis α surjektiv $rg(\alpha) = dim(w) = dim(v)$
α injektiv $dim(ker(\alpha)) = 0$
Dann 8.13 anwenden. □

§9 Matrizen und lineare Abbildungen

Alle Vektorräume seien endlich dimensional.
$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung, falls
$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2), \alpha(kv) = k\alpha(v)$
$\forall v_1, v_2, v \in V,\; k \in K$

9.1 Definition K Körper
a.) Eine mxn-Matrix ueber K ist Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{1n} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1} \cdot a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in K$$

$i = 1, \cdots, m$ mit m Zeilen
$j = 1, \cdots, n$ mit n Spalten
Mit m Zeilen und n Spalten.
Das bedeutet der 1. Index ist immer der Zeilenindex, der 2. Index ist der Spaltenindex.
Abkürzend: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ Falls m und n aus Kontext klar sind: $A = (a_{ij})$.

b.) $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ = Menge aller m × n-Matrizen über K
$\mathcal{M}_n(K)$ = Menge aller n × n-Matrizen (quadratische Matrizen)
1 × n-Matrix= Zeilenvektor der Länge n.
m × 1-Matrix= Spaltenvektor der Länge m.
Alle $a_{i_j} = 0$: Nullmatrix

nxn-Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n$ nxn-Einheitsmatrix

$E_n = (\delta_{ij})$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ Kronecker Symbol

9.2 Satz (Zusammenhang lineare Abbildungen - Matrizen)

V,W K-VR, $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ geordnete Basis von V.
$\mathfrak{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ geordnete Basis von W.
$\alpha : V \to W$ lineare Abbildung.
8.7: α ist eindeutig festgelegt durch $\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_n)$

$\left[v \in V, v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i : \alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha(v_i) \right]$

Stelle die $\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_n) \in W$ bezueglich C dar:

$\alpha(v_1) = a_{11} w_1 + \ldots + a_{m1} w_m$
$\alpha(v_2) = a_{12} w_1 + \ldots + a_{m2} w_m$
$\vdots$
$\alpha(v_n) = a_{1n} w_1 + \ldots + a_{mn} w_m$

α ist eindeutig bestimmt durch a_{ij} (falls $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gegeben sind)

9.3 Definition Bez. wie in 9.2,

$A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ \ldots & & \\ \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix}$

In der i-ten Spalte stehen die Koeffizienten von $\alpha(v_i)$ bezueglich $\mathfrak{C}$
Darstellungsmatrix von α bezueglich $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.
Abkuerzend: A_α, falls $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus Kontext klar sind.
Falls $V = W$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$: $A_\alpha^{\mathfrak{B}}$ statt $A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}$

9.4 Bemerkung a.)

Bez. wie in 9.2,
α ist durch $A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ eindeutig bestimmt.

$v \in V,\ v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$

$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j)$

$= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} c_i) w_j$

(j-Ter Koeffizient von $\alpha(v)$ in der Darstellung bezueglich $w_1, \ldots w_m$

2. Ist $A = \begin{pmatrix} a_1 1 & \dots & a_1 n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m 1 & \dots & a_m n \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Basen von
V (n-Dimensional) und W (m-Dimensional), so existiert eine lineare Abbildung:

$$\alpha : V \to W \text{ mit } A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = A :$$

Definition: $w_1^{'} = a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m$
$w_n^{'} = a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}wM$
Nach 8.7 existiert genau eine lineare Abbildung $\alpha : \; V \to W$ mit
$\alpha(v_i) = w_i^{'}$
Dann ist $A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = A$.

9.5 (Bsp)

a) $V = W = \mathbb{R}^2, \; \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (e_1, e_2)$ kan. Basis
α Drehung um $\overrightarrow{0}$ um Winkel φ (gegen Uhrzeigersinn)

$$\begin{aligned} \text{8.8: } \alpha(\underline{\underline{e_1}}) &= \cos(\varphi)\underline{\underline{e_1}} + \sin(\varphi)\underline{\underline{e_2}} \\ \alpha(\underline{\underline{e_2}}) &= -\sin(\varphi)\underline{\underline{e_1}} + \cos(\varphi)\underline{\underline{e_2}} \end{aligned}$$

$$A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Nullabb. $V \to W \quad v \mapsto \overrightarrow{0}$
Bzgl. allen Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ist Darstellungsmatrix die Nullmatrix

c) $V = W, id_V, \mathfrak{B}$ Basis

$$A_{id_V}^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

$\alpha(v_i) = 0 \cdot v_1 + \cdots + o \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + o \cdot v_n$

d) $V = W = \mathbb{R}^2, \; \mathfrak{B} = (e_1, e_2), \; \mathfrak{C} = (e_2, e_1)$
id_v :
$\alpha(e_1) = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$
$\alpha(e_2) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$
$A_{id_v}^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $V = \mathbb{R}^2, \; \mathfrak{B} = (e_1, e_2), \sigma$ Spiegelt an $< e_1 >$
$\sigma(e_1) = e_1$
$\sigma(e_2) = -e_2$
$A_\sigma^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{B}^{'} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$

$A_\sigma^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\sigma(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 = 0 \cdot (e_1 + e_2) + 1 \cdot (e_1 - e2)$
$\sigma(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 = 1 \cdot (e_1 + e_2) + 0 \cdot (e_1 - e2)$

$\sigma(e_1) = e_1 = a_{11}(e_1 + e_2) + a_{21}(e_1 - e_2)$
$\sigma(e_2) = -e_2 = a_{12}(e_1 + e_2) + a_{22}(e_1 - e_2)$

$A_\sigma^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

f) $V = \mathbb{R}^2,\ \mathfrak{B} = (e_1, e_2),\ \mathfrak{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)\ A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2) = 1(e_1 + e_2) + 0(e_1 - e_2) + (-1)(e_1 + e_2) + 2(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

9.6 Definition

a) $A, B \in M_{m,n}(K),\ A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$
$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$
Summe von A und B (geht nur, wenn A und B den gleichen Typ haben)

b) $A \in M_{m,n}(K),\ k \in K$
k-Vielfaches von A
$k \cdot A := (k \cdot a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

c) $A \in M_{m,\underline{n}}(K), B \in M_{\underline{n},l}(K)$
$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$
$B = (a_{ij})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,l}}$

<u>Produkt</u> $A \cdot B$ ist mxl-Matrix
$A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,l}}$, wobei

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$
$(a_{i1} \cdots a_{in}) \quad \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$

9.7 Definition

Bez. wie in 9.2,
$$A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(in der i-ten Spalte stehen die Koeff von $\alpha(v_i)$ bzgl. $\mathfrak{C}$)
Darstellungsmatrix von α bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.
Abkürzend: A_α, falls $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus Kontext klar.
Falls $V = W$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$: $A^{\mathfrak{B}}$ statt $A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}$

Produkt von mxn-Matrix mit rxs-Matrix ist nicht def., falls $n \neq r$.
$(m \times n) \cdot (n \times l) = m \times l$
$A \cdot B \in M_{m,l}(K)$
$\begin{pmatrix} a_i1 & \dots & a_in \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

9.8 (Bsp)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$
$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 6 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $A \cdot B$ existiert nicht!

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$
$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q}),\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q})$
$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ ist nicht definiert.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$
$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$ $AB \neq BA$
$B \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{Q}),\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$
$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{Q})$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{Q}),\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{Q})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

$(a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)$

$A \cdot B$: An Stelle (i, j) steht das Produkt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B.

g) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{Q}),\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{Q})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

h) $A \in M_{m,n}(K)$
$E_m A = A$
$A \cdot E_n = A$
Speziell:
$A \in M_n(K)$
$E_n A = A E_n = A$

9.9 Satz (Rechenregeln)
$A, A_1, A - 2 \in M_{m,n}(K); B, B_1, B_2 \in M_{n,e}(K), C \in M_{l,r}(K)$

a.) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

b.) $A(B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$

c.) $k(AB) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$

d.) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

9.10 Bemerkung a.) $M_{m,n}(K)$ bilden K-Vektorraum
(Multiplikation mit Skalaren, Addition von Matrizen)
Dimension ist $m \cdot n$
Basis $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$

$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

b.) $M_n(K)$ ist ein Ring mit Eins.
(Addition und Multiplikation von Matrizen)

9.11 Definition $A \in M_n(K)$ heißt invertierbar, falls $B \in M_n(K)$ existiert mit:
$A \cdot B = E_n, B \cdot A = E_n$
(Wenn B existiert, dann ist es eindeutig durch A bestimmt. Bez: A^{-1})

9.12 Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ Existiert ein A^{-1} ?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 7 \cdot b_{21} & 3b_{12} + 7b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b_{11} + 2b_{21} = 1$

$b_{12} + 2b_{22} = 0$

$3b_{11} + 7b_{21} = 0$

$3b_{12} + 7b_{22} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ A^{-1} existiert nicht.

$A, B \in M_n(K)$ Invertierbar

$\Rightarrow A \cdot B$ ist invertierbar:

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{(BB^{-1})}_{E_n} A^{-1} = AA^{-1} = E_n$

9.13 Satz

$\alpha, \beta : U \to V$, $\gamma : V \to W$ lin. Abb., U, V, W K-VR

$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Basen von U, V, W

a) $A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\underline{\underline{\alpha+\beta}}} = A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha} + A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\beta}, \quad A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{k\cdot\alpha} = k \cdot A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha}$

b) $A^{\mathfrak{B},\mathfrak{D}}_{\gamma\circ\alpha} = A^{\mathfrak{C},\mathfrak{D}}_{\gamma} \cdot A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha}$

Beweis a) $\surd$

b) $\mathfrak{B} = (u_1, \ldots, u_e)$, $\mathfrak{C} = (v_1, \ldots, v_m)$, $\mathfrak{D} = (w_1, \ldots, w_n)$, $A^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha} = (a_{ij})$, $A^{\mathfrak{C},\mathfrak{D}}_{\alpha} = (c_{ij})$

$$(\gamma \circ \alpha)(u_i) = \gamma(\alpha(u_i)) = \gamma\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_i\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\gamma(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{kj} w_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{kj} a_{ij}\right) w_k \qquad \square$$

9.14 (Bsp) $U = V = W = \mathbb{R}^2$

$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = (e_1, e_2)$ kan. Basis

α Drehung um φ, β Drehung um ψ (um Null) - gegen Uhrzeigersinn!

$\beta \circ \alpha$ = Drehung um $\varphi + \psi$

$A^{\mathfrak{B}}_{\alpha} = A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad A_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad A_{\beta\circ\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$

9.12.$A_{\beta\circ\alpha} = A_{\beta} \cdot A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\cos(\psi) - \cos(\varphi)\sin(\psi) \\ \cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi) & \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$ Additionstheoreme für sin und cos.

9.15 Korollar *$dim_K(V) = n$, $\mathfrak{B}$ Basis von V, $\alpha : V \to V$ linear.*
α invertierbar (d.h. α ist bijektiv)
$\Leftrightarrow$ $A_\alpha^{\mathfrak{B}}$ invertierbar.
Dann: $A_{\alpha^{-1}}^{\mathfrak{B}} = \left(A_\alpha^{\mathfrak{B}}\right)^{-1}$

Beweis $\Rightarrow$: $A_\alpha^{\mathfrak{B}} \cdot A_{\alpha^{-1}}^{\mathfrak{B}} \underbrace{=}_{9.12b} A_{\alpha\circ\alpha^{-1}}^{\mathfrak{B}} = A_{id_V}^{\mathfrak{B}} = E_n$
$\left(A_\alpha^{\mathfrak{B}}\right)^{-1} = A_{\alpha^{-1}}^{\mathfrak{B}}$
$\Leftarrow$: analog □

<u>Zur Erinnerung</u>
V K-VR, $dim(V) = n$, $\mathfrak{B}$ Basis von V

$$K_{\mathfrak{B}} : \begin{cases} V \longrightarrow K^n \\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad \textit{Vektorraumisomorphismus}$$

9.16 Satz
$\alpha : V \to W$ lin. Abb., $dim(V) = n$, $dim(W) = m$
$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ geordnete Basen von V bzw. W
$v \in V$, $x = K_{\mathfrak{B}}(v) \in K^n$
Dann ist $K_{\mathfrak{C}}(\alpha(v)) = A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \cdot x$.

Beweis $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathfrak{C} = (w_1, \ldots, w_m)$
$A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = (a_{ij})$

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \ x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} c_i \right) w_j$$

$$A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \cdot x = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} z_1 \cdot x \\ \vdots \\ z_m \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} c_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot c_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi} \cdot c_i \end{pmatrix}$$ □

<u>Wiederholung</u>
V Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

$$v \in V, \ v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \ K_{\mathfrak{B}}(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

W Basis $\mathfrak{C} = (w_1, \ldots, w_m)$
$\alpha : V \to W$ lin. Abb.
$\boxed{K_{\mathfrak{C}} = A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \cdot K_{\mathfrak{B}}(v)}$

9.17 (Bsp) *$dim(V) = 4$, $dim(W) = 3$, $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_4)$, $\mathfrak{C} = (w_1, w_2, w_3)$*

$\alpha : V \to W \qquad A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$v = 5v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 4v_4. \quad \alpha(v) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9.18 Korollar

a) $A \in M_{m,n}(K)$, *so ist die Abb.* $\alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^m \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$ *eine lin. Abb.*

$\alpha_A(e_i)$ *= i-te Spalte von* A, $i = 1, \dots, n$

$(e_1, \dots, e_n)$ *kan. Basis von* K^n

b) Jede lin.Abb. $K^n \to K^m$ *ist von der Form in a).*
Verschiedene Matrizen bewirken versch. lin. Abb.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Beweis a) $A(x + x') = Ax + Ax'$

$A(cx) = c(A(x)),\ c \in K,\ x, x' \in K^n \qquad (9.8b), c))$

α_A lin. Abb.

$A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} = A \qquad \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ kan. Basen von K^n, K^m

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad v = K_{\mathfrak{B}}(v)$ bzgl. kan. Basis $\mathfrak{B}$

$= x_1 \cdot e_1 + \dots x_n \cdot e_n. \quad \alpha_A(e_i) =$ i-te Spalte von A

b) Falls $A \neq B$, dann ex. Spaltennr., etwa i, so dass i-te Spalte von $A \neq$ i-te Spalte von B. Nach a) $\alpha_A(e_i) \neq \alpha_B(e_i),\ \alpha_A \neq \alpha_B$. □

$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ kan. Basen von V, W
Vektoren aus V bzw. W =
Koord. vekt. bzgl. $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.
Beh. folgt aus 9.15
VR V, Basen von $V \mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n),\ \mathfrak{B}' = (v_1', \dots, v_n')$

$v \in V,\ v = \sum_{i=1}^n c_i v_i = \sum_{i=1}^n c_i' v_i' \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$

9.19 Definition $V, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ wie oben.

$v_j' = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i = s_{1j} v_1 + \cdots s_{nj} v_n$

$S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \qquad$ nxn-Matrix

<u>Basiswechselmatrix</u> Spalten von S. Koord. der Basisvektor am $\mathfrak{B}'$ bzgl. $\mathfrak{B}$

Analog: $v_k = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{jk} v_j^{'}, \ k = 1, \ldots, n$
$S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = (t_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$

9.20 Satz
$S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ ist invertierbar, $\left(S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}\right)^{-1} = S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$,
d.h. $S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \cdot S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} = E_n = S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} \cdot S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$

Beweis $v_k \sum\limits_{j=1}^{n} t_{jk} v_j^{'} = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{jk} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ij} v_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk} \right) v_i$
$i \neq k : \quad \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk} = 0$
$i = k : \quad \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk} = 1$
$\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij} t_{jk} = \delta_{jk}$ (Kroneker-Symbol)
Eintrag (i, k) in $S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \cdot S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$
$S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \cdot S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} = E_n \; S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} \cdot S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = E_n$ $\square$

9.21 Satz
$V, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ wie oben, $v \in V$. $\boxed{K_{\mathfrak{B}'}(v) = S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \cdot K_{\mathfrak{B}}(v)}$

Beweis $v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = K_{\mathfrak{B}}(v)$
$v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji} v_j^{'} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ji} c_i \right) v_j^{'}$
$S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = K_{\mathfrak{B}'}(v)$ $\square$

9.22 (Bsp) $V = \mathbb{R}^2, \ \mathfrak{B} = (e_1, e_2)$ kan. Basis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2)$ Basis von V.
$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (= Koord. vektor von v bzgl. $\mathfrak{B}$)
$K_{\mathfrak{B}'}(v) = ?$

Berechnen $S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$.

$$\begin{aligned} e_1 &= t_{11}(e_1+e_2) + t_{21}(e_1 - 2e_2) \\ &= (t_{11}+t_{21})e_1 \;+\; (t_{11}-2t_{21})e_2 \\ \Rightarrow\quad 1 &= t_{11}+t_{21},\ 0 = t_{11}-2t_{21} \\ 1 &= 3t_{21},\ t_{21} = \frac{1}{3},\ t_{11} = \frac{2}{3} \\ e_2 &= t_{12}(e_1+e_2) + t_{22}(e_1-2e_2) \\ &= (t_{12}+t_{22})e_1 \;+\; (t_{12}-2t_{22})e_2 \\ \Rightarrow\quad 0 &= t_{12}+t_{22},\ 1 = t_{12}-2t_{22} \\ 1 &= -3t_{22},\ t_{22} = -\frac{1}{3},\ t_{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$K_{\mathfrak{B}'}(v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
$v = \frac{13}{3}(e_1+e_2) + \frac{2}{3}(e_1 - 2e_2)$

Mit 9.15 und 9.20 kann man zeigen:

9.23 Satz
$\alpha : V \to W,\ \mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ *Basen von V,* $\mathfrak{C},\mathfrak{C}'$ *Basen von W*

$$A_\alpha^{\mathfrak{B}',\mathfrak{C}'} = S_{\mathfrak{C}',\mathfrak{C}} \cdot A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \cdot S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$$

9.24 Korollar $\alpha : V \to V,\ \mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ *Basen von V,* $S = S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$

$$A_\alpha^{\mathfrak{B}'} \;=\; S^{-1} \cdot A_\alpha^{B} \cdot S$$

9.25 (Bsp) $V = \mathbb{R}^2,\ \mathfrak{B} = (e_1, e_2),\ \mathfrak{B}' = (e_1+e_2, -e_1+e_2)$
$S \;=\; S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} \;=\; S^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$e_1 = \frac{1}{2}(e_1+e_2) - \frac{1}{2}(-e_1+e_2)$
$e_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2) + \frac{1}{2}(-e_1+e_2)$
$\alpha(e_2) = e_1,\ \alpha(e_1) = \alpha_2$
$A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A_\alpha^{\mathfrak{B}'} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\alpha(e_1+e_2) = e_1+e_2,\ \alpha(-e_1+e_2 = e_1 - e_2$

$\alpha : V \to W$ linear, $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, $\mathfrak{C}$ Basis von W
$rg(\alpha) \;=\; dim(\alpha(v)) \;=\; dim(<\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_n)>)$
$A_\alpha \;=\; A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ Spalten von A_α = Koord. vekt. von $\alpha(v_i)$ bzgl. $\mathfrak{C}$

$rg(\alpha) = dim(<$ Spallten von $A_\alpha >)$ =Maximalanzahl linear unabh. Spalten von A_α (6.22, 6.30)

9.26 Definition A mxn-Matrix uber K Spaltenrang von A, $srg(A)$, ist die Maximalanzahl linear unabh. Spalten von A.
Analog: Zeilenrang von A, $zrg(A)$.

9.27 Satz
$\alpha : V \to W$ lin. Abb., $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Basen von V bzw. W
Dann $rg(\alpha) = srg\left(A_\alpha^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}\right)$
Beweis: siehe oben (direkt vor 9.25)

9.28 Satz
A mxn-Matrix
$zrg(A) = srg(A)$
Diese gemeinsame Zahl heißt Rang(rg) von A, $srg(A)$.
(Beweis: WHK Theorem 10.36)

9.29 Definition A ist mxn-Matrix.
$A = (a_{ij}, i = 1, \ldots, m \ \ j = 1, \ldots, n)$
Die transponierte Matrix A^t zu A ist.
nxm-Matrix A^t zu A ist :
nxm-Matrix: $A^t = (b_{ij}) i = 1, \ldots, n \ \ j = 1, \ldots, m$
mit $b_{ij} = a_{ij}$
Bsp:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

9.30 Bemerkung $(A + B)^t = A^t + B^t, \ (A \cdot B)^t = (B)^t \cdot (A)^t$

9.31 Satz
a.) $rg(A) = rg(A^t)$

b.) A ist mxn-Matrix, so ist $rg(A) \leq min(n, m)$

9.32 Definition Schritt 1:
Addition des skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
Schritt 2:
Vertausch zweier Zeilen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Schritt 3:
Multiplikation einer Zeile mit Skalar $\neq 0$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{pmatrix}$$

9.33 Bemerkung Elementare Zeilen- und Spaltenumfornungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

9.34 Satz

Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ (1) und Typ (2) und gegebenenfalls Spaltenvertausch lässt sich jede Matrix A auf folgende Form bringen:

$\begin{pmatrix}b_{11}&&*\\0&b_{22}&*\\0&0&b_{ll}\end{pmatrix}$*, wobei die* $b_{11},\dots,b_{ll} \neq 0$ *sind.*

$\begin{pmatrix}&*\\0&\end{pmatrix}$

$rg(A) = rg(B) = l$

(Beweis hierzu in WHK: S. 330/331)

9.35 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix}2&9&4&0&1\\4&18&8&-1&4\\0&-3&1&0&1\\-1&\frac{3}{2}&-4&4&-\frac{21}{2}\end{pmatrix}$$

4x5 Matrix über Q $rg(A) =?$

(1) Nullen in 1. Spalte unterhalb von a_{11} erzeugen, indem man geeignete Vielfache der 1. Zeile zu den übrigen Zeilen addiert. Geht einwandfrei da $a_{11} \neq 0$ ist. Danach Finger weg von Zeile 1.

$$A \to \begin{pmatrix}2&9&4&0&1\\0&0&0&-1&2\\0&-3&1&0&1\\0&6&-2&4&-10\end{pmatrix} = A_1$$

(2) Nullen in 2. Spalte unterhalb von a_{22} erzeugen, geht falls $a_{22} \neq 0$ ist. Ist hier nicht der Fall. Zunächst geeignete Zeilenvertauschung 2. Zeile mit tieferen Zeilen durchführen. (hier Vertauschen wir die 2. mit der 3. Zeile, anschließend Addition der 4. Zeile 2 mal mit der 2. Zeile. $A \to \begin{pmatrix}2&9&4&0&1\\0&-3&1&0&1\\0&0&0&-1&2\\0&6&-2&4&-10\end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix}2&9&4&0&1\\0&-3&1&0&1\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&4&8\end{pmatrix}$ Ab jetzt nichts mehr mit der 2. Zeile machen!

(3) In der 3. Spalte sind alle Einträge unterhalb der 2. Zeile = 0, aber die Matrix ist noch nicht in gewünschter Form. $(a_{33}) \neq 0$ .Sorge dafür das durch geeignete Zeilen oder Spaltenvertauschung (der hinteren Zeilen/Spalten) diese erreicht wird. (Vertauschen zuerst 3. mit 4. Spalte und anschließend: 4. Zeile= 4. Zeile + 4 mal

die 3. Zeile) $A_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Verfahren ist abgeschlossen: $rg(A) = 3$.

9.36 Bemerkung Verfahren aus 9.33/9.34 lässt sich auf Dimensionsbestimmung von UR anwenden:
$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle, u_i$ nicht notwendig linear unabhaengig.
$dim(U) =$? Wähle Basis von V, $\mathfrak{B}$, bilde Koordin. vektor $K_{\mathfrak{B}}(u_i), i = 1, \dots, k$
$dim(U) = dim\langle K_{\mathfrak{B}}(u_1), \dots, K_{\mathfrak{B}}(u_k) \rangle = A$
$rg(A) = dim(U)$

9.37 Satz
A ist eine nxn-Matrix. Dann gilt: $\begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \vdots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$*, wobei* $b_{ii} \neq 0$.
A invertierbar $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$ *(d.h. Spalten von A sind linear unabhängig, und auch Zeilen von A linear unabhängig).*
Beweis:
Definition: $\alpha_A : \begin{cases} K^n \rightarrow K^n \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$
$A^{\mathfrak{B}}_{\alpha_A} = A, \mathfrak{B}$ *ist die kanonische Basis.*
9.14: α_A *invertierbar* $\Leftrightarrow$ *A invertierbar.*
8.15: α_A *invertierbar* $\Leftrightarrow$ α_A *surjektiv*
$\Leftrightarrow rg(\alpha_A) = n$
9.26: $rg(\alpha_A) = rg(A)$

§10 Determinanten

(WHK 10.4)
Quadratische nxn-Matrix über K.
$A \in M_n(K) \mapsto det(A) \in K$
Wichtige Eigenschaft: A invertierbar $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
Motivation mit $n = 1, 2$:
$n = 1 : A = (a)$ invertierbar $\Leftrightarrow a \neq 0$ $(A^{-1} = (a^{-1}))$
Definition: $det((a)) = a$
$n = 2 : A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Spalten von A linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ Zeilen von A linear unabhängig.
A ist nicht invertierbar:

a.) A enthält Nullzeile oder Spalte.

b.) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$,
$a_{11} = c \cdot a_{12}$ $a_{12} \neq 0$ (sonst 1. Zeile Nullzeile)

$a_{21} = c \cdot a_{22} \;\; a_{22} \neq 0$ (sonst 2. Zeile Nullzeile)
$a_{11}a_{12}^{-1} = c = a_{21}a_{22}^{-1}$ ($c \neq 0$ sonst 1. Spalte Nullspalte)
$a_{11}a_{12}^{-1} = a_{21}a_{22}^{-1}$
$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$
$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = 0$
A invertierbar $\Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
Definition $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

10.1 Definition $det : M_n(K) \to K.$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$A \in M_n(K),\; i, j \in \{1, \ldots, n\}$
$A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ ist die $(n-1) \times (n-1)$ - Matrix, die man erhält, wenn man in A die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.
Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix},\; A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix},\; A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

10.2 Definition $A \in M_n(K)\;\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ist $n = 1$, so ist $det(A) = a$, falls $A = (a)$.
Definiere für $n > 1$ $det(A)$ rekursiv.

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} det(A_{1j}) =$$
$$a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12} + \ldots + a_{1n}det(A_{1n})$$

$det(A)$ heißt Determinante von A
(Entwicklung nach der 1. Zeile)
$n = 2$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12}) =$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, da $A_{11} = (a_{22}), A_{12} = (a_{21})$ siehe oben

10.3 Beispiel

a.) $n = 3:\; det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$\searrow + Terme \qquad \nearrow - Terme$
Entsprechende Formeln gibt es für jede nxn - Matrix (Leibniz Formeln)

b.) $det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

Determinante einer unteren Dreiecksmatrix)

Induktion nach n:

IA: $n = 1\surd$

IS: $n-1 \to n$:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}det(A_{11}) = a_{11}det\begin{pmatrix} a_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{IV} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Insbesondere : $det(E_n) = 1$

10.4 Satz (Laplace'scher Entwicklungssatz)

a.) (Entwicklung nach einer Zeile)

Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij})$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

b.) (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij})$

10.5 Korollar $det(A) = det(A^t)$

Beweis: $det(A^t)$ = Entwicklung nach der 1.Zeile von A^t =
Entwicklung nach der 1. Spalte von A $\underbrace{=}_{10.4} det(A)$

10.6 Beispiel

a.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Berechenbar mit 10.3a), Berechnung per Definition.

$det(A) = 2 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

$-24 - 9 = -33$

Entwicklung nach der 2. Spalte: $det(A) = -3 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -3 \cdot 11 = -33$

Allgemeine Regel: Zur Berechnung von $det(A)$ suche Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen und entwickle nach dieser Zeile oder Spalte.

b.) $det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

Det. von oberen Dreiecksmatrix

10.7 (Rechenregeln für die Determinante) $A \in M_n(K)$, $s_1, \ldots, s_n$ Spaltenvektoren von A d.h. $A = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$

a) Ist $t_i \in K^n$, $B = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$
so ist $det(A) + det(B) \; = \; det(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i \; + \; t_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$

b) Ist $a \in K$, $det(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, a \cdot s_i, s_{i+1}, \ldots s_n) = a \cdot det(A)$

c) $det(a \cdot A) = a^n \cdot det(A)$

d) Vertauschen zweier Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante
$det(s_1, \ldots, si, \ldots, s_j, \ldots, s_n) = -det(s_1, \ldots, si, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$

e) Sind zwei Spalten von A gleich, dann ist $det(A) = 0$

f) Ist $i \neq j$, $a \in K$, so ist
$det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + a \cdot s_j, s_{i+1}, \ldots s_n) = det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots s_n) = det(A)$

Aussagen gelten entspr. für die Zeilen von A

Beweis a)-d) folgen schnell aus 10.4.
e) folgt per Induktion aus 10.4.; $n = 2$ folgt aus der Def. formel für $n = 2$
$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0$
f) $det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + a \cdot s_j, \ldots, s_n$
$\underbrace{=}_{a)} det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
$+det(s_1, \ldots, s_{i-1}, a \cdot s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
$\underbrace{=}_{b)} det(A) + a \cdot det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_j, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$

Bem.
I.Alg. ist $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$
$A = B = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$det(A) + det(B) = 2$
$det(A + B) = det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$

10.8 Bemerkung a) Elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen haben nach 10.7. folgenden Effekt auf $det(A)$:

- Add. des Vielf. einer Zelle/Spalte zu einer anderen.
  $\hookrightarrow$ Wert der Det. ändert sich nicht.

- Vertauschen Zeilen/Spalten
  $\hookrightarrow$ Det. ändert Vorzeichen
- Mult. einer Zeile/Spalte mit $a \in K$.
  $\hookrightarrow$ Det. wird ebenfalls mit a mult.

b) Strategie für Det. Berechnungen
Erzeuge mit Zeilen/Spalten umf. des ersten beiden Typen möglichst viele Nullen in Zeile/Spalte (Vorzeichen kontrollieren!) und entwickle nach dieser Zeile/Spalte.
Oder: Bringe Matrix auf Dreiecksgestalt (9.33/9.34) und wende 10.6.b) an.

10.9 (Bsp) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ $det(A) \underbrace{=}_{10.7f} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{Entw.nach 1.Sp} det \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} =$ 48

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$det(A) = -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} =$
$-det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$

10.10 Satz (Determinantenmultiplikationssatz)
$A, B \in M_n(K)$ $\quad det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

10.11 Satz
$A \in M_n(K)$ Dann gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$
($\underbrace{\Leftrightarrow}_{9.36}$ $rg(A) = n$, d.h. Zeilen/Spalten von A sind linear unabh.)

In diesem Fall ist $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$ $\left(= \dfrac{1}{det(A)}\right)$

Beweis $\Leftarrow$: Angenommen A ist nicht invertierbar
$\underbrace{\Rightarrow}_{9.36}$ Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von A sind linear abhangig

$\exists j: \; s_j = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} c_i s_i, \; c_i \in K$

$det(A) = det(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n) \underbrace{=}_{10.7.f)} det(s_1, \ldots, \underbrace{s_j - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} c_i s_i}_{=0}, \ldots, s_n)$

$= det(s_1, \ldots, s_{j-1}, 0, \ldots, s_n) \underbrace{=}_{10.7.b)} 0 \Rightarrow: \; A \cdot A^{-1} = E_n$

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) \underbrace{=}_{10.10} det(A \cdot A^{-1}) = det(E_n) = 1$$

$$\Rightarrow \; det(A) \neq 0 \quad det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = det(A)^{-1}$$ □

Wie berechet man A^{-1}?

10.12 Definition $A \in M_n(K)$. A^{ad} Adjunkte von A, nxn-Matrix über K, ist definiert durch:
$A^{ad} = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$

10.13 Satz
$A \in M_n(K)$

a) $A \cdot A^{ad} = A^{ad} \cdot A = (det(A)) \cdot E_n = \begin{pmatrix} det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & det(A) \end{pmatrix}$

b) Ist $det(A) \neq 0$, *so* $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot A^{ad}$

Beweis a) $i, k, i \neq k$
Eintrag (i,k) in $A \cdot A^{ad}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ij} det(A_{kj}) \underbrace{=}_{\text{Entw. nach k-ter Zeiler}} det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$i = k$ Eintrag (i,i) in $A \cdot A^{ad}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) \underbrace{=}_{10.4} det(A)$$

b) folgt aus a). □

10.14 (Bsp) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$b_{11} = det(A_{11})$
$b_{11} = -det(A_{21})$
$b_{11} = -det(A_{12})$
$b_{11} = det(A_{22})$

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $K = \mathbb{Z}_5$ $det(A) = 3$

$A^{-1} = 3^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

10.15 Bemerkung $\alpha : V \to V$ lin. Abb.
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von V

$$A_\alpha^{\mathfrak{B}'} = S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathfrak{B}} \cdot S$$

$$S = S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(9.23$$

$det\left(A_\alpha^{\mathfrak{B}'}\right) = det\left(S^{-1} \cdot A_\alpha^{\mathfrak{B}} \cdot S\right) = det(S^{-1}) \cdot det\left(A_\alpha^{\mathfrak{B}}\right) \cdot det(S) \underbrace{=}_{10.11} det\left(A_\alpha^{\mathfrak{B}}\right)$ Definiere: $det(\alpha) = det(A_\alpha^{\mathfrak{B}}$

§11 Lineare Gleichungssysteme

11.1 Beispiel

a.) Welche Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ stehen auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht?

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

2 Gleichungen mit 4 Unbekannten.

b.) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Unterraum $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$?

Liegt im UR $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

3 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

11.2 Definition Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems (LGS) über Körper K:

$$\begin{aligned} (*) a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

m Gleichungen, n Unbekannte, $a_{ij} \in K, b_i \in K$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Losung von (*), wenn $x_1, \ldots, x_n$ sämtliche Gleichungen erfüllen.

LGS heißt homogen, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$, sonst inhomogen.

Setzt man $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so lasst sich (*) schreiben als:
$A \cdot x = b$ (Matrixform eines LGS), A ist Koeffizientenmatrix des LGS.
$s_1, \dots, s_n$ Spalten von A
$(*)$ lasst sich in SPaltenform schreiben:
$x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n = b$
Fragen:

1. Wann hat LGS mindestens eine Losung?
2. Wann hat LGS genau eine Losung?
3. Wenn es Losungen gibt, kann man alle beschreiben?

Theorie der LGS $\Leftrightarrow$ Theorie der linearen Abbildungen
$A \in M_{m,n}(K),\ \alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^m \\ x \mapsto A \cdot x \end{cases}$
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ kanonische Basen von K^n, K^m
$A_{\alpha_A}^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = A$
i-te Spalte s_i von A: $s_i = \alpha_A(e_i) = Ae_i,\ i = 1, \dots, n$
Bild von $\alpha_A = \langle \alpha_A(e_1), \dots, \alpha_A(e_n) \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$

11.3 Satz (Existenz einer Losung eines LGS)

Gleichwertig sind:

(1) $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung x.

(2) b liegt im Bild von A

(3) $rg(A) = rg(A, b)$ (wobei hier stets gilt: $rg(A) \leq rg(A, b)$) $rg(A, b)$ ist erweiterte Matrix vom Typ $m \times (n + 1)$

Beweis:
(1) $\Leftrightarrow$ (2)$\surd$ *nach Vorbemerkung.*
(2) $\Leftrightarrow$ (3) $b \in \alpha_A(K^n) = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \Leftrightarrow rg(s_1, \dots, s_n) = rg(s_1, \dots, s_n, b) = rg(A, b)$
Aus 11.3 folgt auch: Homogene LGS haben immer mindestens eine Lösung. Klar: $x = 0$ (Nulllösung)

11.4 Beispiel

11.1b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & -5 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2, rg(A, b) = 3$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2, rg(A, b) = 3$ daher keine Lösung!

11.5 Satz

a.) Die Menge der Lösungen des homogenen LGS

$$Ax = 0$$

bildet einen Unterraum des K^n der Dimension $n - rg(A)$, nämlich der Kern $\alpha_A =:$ $KernA$.

b.) Ist das inhomogene System

$$Ax = b$$

lösbar und ist $x_0 \in K^n$ eien spezielle Lösung so erhält man alle Lösungen durch:

$$\{x : Ax = b\} = \{x_0 + y : Ay = 0\}$$

(zugehöriges LGS).
Ist U der Lösungsraum von $Ax = 0$, so ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gerade.

$$x_0 + U = \{x_0 + y : y \in U\}$$

Nebenklasse von U (affiner Unterraum von K^n)

Beweis:

a) *Lösungsmenge von $Ax = 0 = ker(\alpha_A)\surd$*
   $dim(ker(\alpha_A)) \underset{8.14}{=} dim(K^n) - dim(\alpha_A(K^n)) = n - rg(A)$

b) $Ax_0 = b$ *Sei $y \in K^n$ mit $Ay = 0$.*
   $A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b \Rightarrow x_0 + y$ *ist Lösung.*
   $\{x_0 + y : Ay = 0\} \subseteq \{x : Ax = b\}$
   Umgekehrt: Sei $x \in K^n$ mit $Ax = b$
   $A \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Lsg. des zug. hom. LGS}} = Ax - Ax_0 = b - b = 0$
   $x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{y} \in \{x_0 + y : Ay = 0\}$ *(Gleichheit der Mengen)*

11.6 Beispiel

LGS aus 11.1 a.)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Ax = 0$
Lösungsraum ist Unterraum von $\mathbb{R}^4$ $\dim = 4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$

11.7 Satz

a.) LGS $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $rg(A) = rg(A, b) = n$, die Anzahl der Unbekannten. (Insb. $m \geq n$)

b.) Ist A nxn-Matrix (Anz. Gleichungen = Anzahl Unbekannten)
So ist $Ax = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $det(A) \neq 0$.
Die Lösung ist dann $x = A^{-1}b$.
(Mit der Beschreibung von A^{-1} aus 10.13b.): Cramer'sche Regel)

<u>Beweis</u>*:*

a.) $Ax = b$ lösbar $\underset{11.3}{\Leftrightarrow}$ $rg(A) = rg(A, b)$
Eindeutigkeit der Lösung $\underset{11.5}{\Leftrightarrow}$ $n - rg(A) \Leftrightarrow n = rg(A)$

b.) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\underset{a.)}{\Leftrightarrow}$ $rg(A) = rg(A, b) = n$
$\Leftrightarrow rg(A) = n$
(da $rg(A, b) = n$, denn (A, b) hat n Zeilen)
$\underset{10.11/9.36}{\Leftrightarrow}$ $det(A) \neq 0$
$det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert
$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$.

Jeder (affine) Unterraum von K^n lässt sich als Lösungsmenge eines LGS darstellen.

11.8 Satz

Sei U Unterraum von K^n. Ist $m := n - dim(U)$, so existiert eine mxn- Matrix A, so dass für $x \in K^n$ gilt:

$$x \in U \Leftrightarrow Ax = 0$$

Ferne existiert für jedes $y \in K^n$ ein $b \in K^n$ mit

$$x \in y + U \Leftrightarrow Ax = b$$

Beweis $k := dim(U)$, $u_1, \ldots, u_k$ Basis von U

$$G = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_k^t \end{pmatrix}$$

kxn-Matrix
Betrachte LGS $Gz = 0$
$rg(G) = k \underbrace{\Rightarrow}_{11.5a)} dim$ des Lösungraums von $Gz = 0$ ist $n - k$.

Sei $a_1, \dots, a_{n-k}$ Basis dieses Lösungsraum.
$u_1^t a_j = 0, \dots, u_k^t a_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n-k$
$a_j^t u_1 = 0, \dots, a_j^t u_k = 0$ für alle $j = 1, \dots, n-k$
Setze $A = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-k}^t \end{pmatrix}$. Dann liegen $u_1, \dots, u_k$ im Lösungsraum von $Ax = 0$
Dim. des Lösungsraums von $Ax = 0 \underbrace{=}_{11.5a)} n - rg(A) = n - (n-k) = k$
$\Rightarrow$ U ist der Lösungsraum von $Ax = 0$.

Sei $y \in K^n$. Wähle A zu U wie vorher.
Setze $b := Ay$

$$\begin{aligned} x \in y + U \Leftrightarrow x - y \in U &\Leftrightarrow A(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax - Ay = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax = b \end{aligned}$$

Wie löst man LGS?
geg. $Ax = b,\ A$ mxn-Matrix über K.
Elem. Zeilenumf. an (A,b):

- Add. des Vielf. einer Zeile zu einer anderen
- Vertauschung zweier Zeilen
- Mult. einer Zeile mit Skalar $\neq 0$

Diese Operationen ändern nicht die Lösungsmenge des LGS.
Sogar:

11.9 Lemma
$A \in M_{m,n}(K),\ X \in M_{n,l}(K),\ C = AX \in M_{m,l}(K)$
Wendet man die gleichen elem. Zeilenop. auf A und auf C an, so gilt für die entstehenden Matrizen A', C':

$$A'X = C'$$

Beweis Nachrechnen. □

11.10 (Gauß-Algoritmus) Zeilenumformung an $(\underline{A}, b)$ von dem ersten beiden Typen und ggf. Spaltenvertauschung um Dreiecksgestalt wie bei der Rangbest. zu erhalten.
Zwei Besonderheiten:

- Spaltenvertauschen nur in den anderen n Spalten.
- Erzeugung der Nullen unterhalb der Diagonale wird nicht auf die letzte Spalte angew.

11.9. Lösungsmenge ändert sich nicht bei Zeilenumformung. Spaltenwert (etwa Spalte i mit Spalte k) bedeutet Vert. der Umbek. x_i und x_k. (Buch füren!)
Man erhält Matrix von folgender Form.

$$(A, b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ddots & & * & \vdots & \vdots \\ & \ddots & a'_{rr} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & & & b'_{n+1} \end{array}\right)$$

$r = rg(A') = rg(A) \leq \min(m, n)$

Neues LGS: $A'x' = b'$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ erstellt am x durch Perm. der Koord. ensprechend der durch gef. Spaltenwert.
Lösungsmenge von LGS $A'x' + b'$:

(1) Ist $r < m$ und ist eines der Elte. $b'_{r+1}, \ldots, b'_m \neq 0$, so ist das LGS nicht lösbar.

(2) Ist $r = m$ oder $r < m$ und $b'_{r+1}, \ldots, b'_m = 0$ so ist $rg(A') = rg(A', b') \Rightarrow$, es existiert mind. eine Lösung.

(2a) Ist $r < n$, so kann man $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ frei wählen, und $x'_r, \ldots, x'_1$ ergeben sich dann rekursiv.

$$a'_{r,r}x'_r + a'_{r,r+1}x'_{r+1} + \cdots + a'_{r,n}x'_n = b'_r$$

$$x'_r = \frac{1}{a'_{rr}}\left(b'_r - a'_{r,r+1}x'_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x'_n\right)$$

$$x'_{r-1} = \frac{1}{a'_{r-1,r-1}}\left(b'_{r-1} - a'_{r-1,r}x'_r - a'_{r-1,r+1}x'_{r+1} - \ldots - a'_{r-1,n}x'_n\right)$$

$$x'_1 = \frac{1}{a'_{11}}\left(b'_1 - \sum_{l=2}^{n} a'_{1l}x'_l\right)$$

Lösungsmenge: $\left\{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} : x'_{r+1}, \ldots, x'_n \in K,\ x'_{r+1}, \ldots, x'_n \text{ wie oben}\right\}$

Andere Beschreibung: finde spez. Lösung z.B. $x'_{r+1} = \cdots = x'_n = 0$
Bestimme Basis oder Lösungsraums von $A'x' = 0$

Setze für $x'_{x+1}, \ldots, x'_n$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}$, berechne jeweils die zugehörige $x'_1, \ldots, x'_n$

(2b) Ist $r = n$ so sind alle $x'_1, \ldots, x'_n$ eindeutig bestimmt.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \diagdown & x & * \\ 0 & \diagdown & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x'_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}},\ x'_{n-1} = \frac{1}{a'_{n-1,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1,n}, x'_n\right)$$

$$x_1^{'} = \frac{1}{a_{nn}^{'}}\left(b_1^{'} - \sum_{l=2}^{n} a_{12}^{'} x_l^{'}\right)$$

11.11 Beispiele

a.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$K = \mathbb{Q}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & -5 & 7 & | & -8 \\ 0 & -1 & 5 & |-3 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & -5 & 7 & | & -8 \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} & | & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{5}{18} \cdot \frac{7}{5} = -\frac{7}{18} \\ x_2 &= -\frac{1}{5}(-8 - 7x_3) = -\frac{1}{5}(-8 + \frac{49}{18}) = \frac{19}{18} \\ x_1 &= 4 + 3x_3 - 2x_2 = 4 - \frac{21}{18} - \frac{38}{18} = \frac{13}{1} \end{aligned}$$

eindeutige Lösung.

b.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$K = \mathbb{Q}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis des Lösungsraumes:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1,\ \ x_4 = 0 \Rightarrow\ x_2 = \frac{1}{3}\ \ x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -\frac{5}{3} \\ x_3 &= 0,\ \ x_4 = 1 \Rightarrow\ x_2 = -\frac{2}{3}\ \ x_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\{\begin{pmatrix} -5a + b \\ a - 2b \\ 3a \\ 3b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\} = \{\begin{pmatrix} \frac{-5a+b}{3} \\ \frac{a-2b}{3} \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

c.)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$K = \mathbb{Q}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$
Spezielle Lösung:

$$x_3 = x_4 = 0, \quad -3x_2 = 4 \Leftrightarrow \; x_2 = -\tfrac{4}{3}$$
$$x_1 = -2x_2 + 1 = \tfrac{8}{3} + 1 = \tfrac{11}{3}$$

$\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Allgemeine Lösung:
spezielle Lösung + allgemeine Lösung des zug. hom. Systems:
Lösungsmenge:
$\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{11-5a+b}{3} \\ \frac{-4+a-2b}{3} \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$

$$\begin{aligned} x_3 &= a, \quad x_4 = b \\ -3x_2 + a - 2b &= 4 \;\Leftrightarrow\; x_2 = \frac{-4 + a - 2b}{3} \\ x_1 + 2x_2 + a + b = 1 & \\ \Leftrightarrow x_1 &= 1 - 2x_2 - a - b = \frac{3 + 8 - 2a + 4b - 3a - 3b}{3} = \frac{11 - 5a + b}{3} \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$K = \mathbb{Q}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\to}_{(x_1'=x_1, x_2'=x_3, x_3'=x_2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$x_3' = a$ beliebig $\;-3x_2' = 1,\; x_2' = -\frac{1}{3},$
$x_1' = -x_2' - x_3' = \frac{1}{3} - a = \frac{1-3a}{3}\; x_1 = \frac{1-3a}{3}, \;\; x_2 = a \;\; x_3 = -\frac{1}{3}$
Lösungsmenge:
$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-3a}{3} \\ a \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$

e.)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$K = \mathbb{Z}_2$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$
$x_2 = 0, \ \ x_1 = 1$ (eindeutige Lösung)

$$K = \mathbb{Z}_3 :$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$
$rg(A) = 2, \ \ rg(A, b) = 3 \rightarrow$ keine Lösung.

11.12 Satz (Bestimmung der Inversen einer Matrix)
A invertierbare Matrix über K. $(det(A) \neq 0)$
$A \cdot A^{-1} = E_n$
Bringe durch elementare Zeilenumformungen die Matrix A auf Gestalt E_n.
Wie bei Gauß, aber zusätzlich auch oberhalb der Diagonale Nullen erzeugen und am Ende Zeilen mit Skalar $\neq 0$ *so multiplizieren, dass in der Diagonale Einsen stehen.*
Spaltenvertauschungen müssen nicht vorgenommen werden, da $rg(A) = n$.
$A \rightarrow E_n$ *Führe selbe Umformung an* E_n *durch:*

$$E_n \rightarrow A'$$
$$A \cdot A^{-1} = E_n$$
$$aus\ 11.9 : A \cdot A^(- 1) = E_n \rightarrow E_n \cdot A^(- 1) = A^(- 1) \cdot A^(- 1) = A^(- 1)$$
$$(A \mid E_n) \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

11.13 (Bsp) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ K = \mathbb{Q}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

§12 Eigenwerte

$\alpha : V \to V$ lin. Abb.
Suche Basis $\mathfrak{B}$, so dass $A_\alpha^{\mathfrak{B}}$ möglichst einf. Gestalt.

Am schönsten: $A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix)

$\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$
$\alpha(v_i) = b_i v_i$ Geht im Allg. nicht.

12.1 (Bsp)

a) σ Spiegelung am $\langle e_1 \rangle$ im $\mathbb{R}^2$: $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$

$$A_\sigma^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) ϱ Drehung um $\overrightarrow{0}$ um Winkel $\neq 0, \pi$. Dann existiert keine Basis bzgl. des $A_\varrho^{\mathfrak{B}}$ Diagonalgestalt hat.

12.2 Definition V K-VR, $\alpha : V \to V$ lin. Abb.
$c \in K$ heißt <u>Eigenwert</u> von α, falls $v \neq \overrightarrow{0}$ im V existiert mit $\alpha(v) = c \cdot v$

Jeden solchen Vektor $v \neq \overrightarrow{0}$ nennt man <u>Eigenvektor</u> von α zum Eigenwert c.

Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert c zusammen mit $\overrightarrow{0}$ heißt <u>Eigenraum</u> von α bzgl. c.

12.3 Bemerkung c Eigenwert von $\alpha : V \to V$.
Eigenraum von α zu $c = ker(c \cdot id_V - \alpha)$, also Unterraum von V

Beweis

$$\begin{aligned} \alpha(v) = c \cdot v &\Leftrightarrow c \cdot v - \alpha(v) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow (c \cdot id_V - \alpha)(v) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow (c \cdot id_V - \alpha) \end{aligned}$$

□

12.4 (Bsp)

a) id_V hat nur 1 als Eigenwert
Eigenraum zu 1 ist V

b) σ Spiegelung aus 12.1 a):
Eigenwert 1,Eigenraum $\langle e_1 \rangle$
Eigenwert -1,Eigenraum $\langle e_2 \rangle$
Andere Eigenwerte gibt es nicht.

12.5 Definition A nxn-Matrix über K

Eigenwert von A = Eigenwerte $\alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^n \\ x \mapsto Ax \end{cases}$

12.6 Bemerkung $\alpha : V \to V$ lin. Abb.
Eigenwerte von α = Eigenwerte von $A_\alpha^{\mathfrak{B}}$ für jede Basis $\mathfrak{B}$.
(Nachrechnen)

12.7 Satz
V n-dimensionaler VektorRaum über K, $\mathfrak{B}$ Basis, $\alpha : V \to V$ linear, $A = A_\alpha^{\mathfrak{B}},\ c \in K$
Dann sind gleichwertig:

(1) c ist Eigenwert von α

(2) $ker(c \cdot id_V - \alpha) \neq \{\overrightarrow{0}\}$

(3) $det(c \cdot E_n - A) = 0$

Beweis (1) $\Leftrightarrow$ (2): 12.3
(2) $\Leftrightarrow$ (3): $c \cdot E_n - A = A^{\mathfrak{B}}_{c \cdot id_V - \alpha}$

$$\begin{aligned} det(c \cdot E_n - A) = 0 &\underbrace{\Leftrightarrow}_{10.11} c \cdot E_n - A \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{9.14} c \cdot id_V - \alpha \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{8.15} c \cdot id_V - \alpha \text{ ist nicht injektiv} \underbrace{\Leftrightarrow}_{8.5} ker(c \cdot id_V - \alpha) \neq \{\overrightarrow{0}\} \end{aligned}$$ □

Betrachte Funktion $f_A : \begin{cases} K \to K \\ t \mapsto det(t \cdot E_n - A) \end{cases}$

12.8 Satz
Die Funktion f_A ist Polynomfunktion in t vom Grad n, d.h.
$f_A(t) = det(t \cdot E_n - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,\ a_i \in K$ (unabh. von t)

Beweis Mit Hilfe der Entwicklungsformel □

12.9 Definition

a) Das Polynom $f_A(t) = det(t \cdot E_n - A)$ heißt das <u>charakeristische Polynom</u> von $A \in M_n(K)$

b) $\alpha : V \to V$ lin. Abb., $A = A_\alpha^{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ Basis, $f_A(t)$ charakt. Polynom von α
(unab. von der Wahl von $\mathfrak{B}$)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$t \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix}$

$det(t \cdot E_n - A) = (t-1) \cdot (t-4) - 6 = \underline{t^2 - 5t - 2}$

Wiederholung:
$\alpha : V \to V$ linear
$c \in K$ $\underline{\textit{Eigenwert}}$ von α, falls $v \neq \overrightarrow{0}$ existiert mit
$\alpha(v) = \overline{c \cdot v} (v$ Eigenvektor zu $c)$
Alle Eigenvektoren zu c bilden zusammen mit $\overrightarrow{0}$ Eigenraum zu c.
$c \in K$ Eigenwert $\Leftrightarrow ker(c \cdot id_v - \alpha) \neq \{\overrightarrow{0}\}$
$\Leftrightarrow det(c \cdot E_n - A) = 0$
$A = A_\alpha^{\mathfrak{B}}$
Charakteristisches Polynom zu α:
$t \mapsto det(t \cdot E_n - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$

12.10 Korollar *$\alpha : V \to V$ linear, $dim(V) = n$*

a.) $c \in K$ Eigenwert von $\alpha \Leftrightarrow c$ ist Nullstelle des char. Polynoms von α

b.) α hat höchstens n Eigenwerte.

12.11 Beispiel

a.) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$det(t \cdot E_2 - A) = det\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} =$
$(t+1)(t+3) - 8 = t^2 + 4t - 5$ (charakteristisches Polynom)
Nullstellen: $t_{1,2} = -\frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$ Eigenwerte: $1, -5$
Eigenwerte zum Eigenwert 1: ($\mathfrak{B}$ ist die kanonische Basis)
$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x &= -x + 2y \\ y &= 4x - 3y \\ 0 &= 2x - 2y \\ 0 &= 4x - 4y \\ 0 &= x - y \\ x &= y \end{aligned}$$

Eigenraum zu $c = -5 : \left\{\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} : x \in K\right\}$
$\mathfrak{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$
$A_\alpha^{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix.

b.) $\varrho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um $\overrightarrow{0}$, $\mathfrak{B}$ kanonische Basis.

$A = A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$det(t \cdot E_2 - A) = det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1$
Hat keine Nullstellen, ϱ hat also keine Eigenwerte.

c.) $\varrho : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{B}$ kanonische Basis.
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Charakteristisches Polynom: $t^2 + 1$ Nullstellen: $i, -i$ in $\mathfrak{C}$
$i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} ix &= -y \\ iy &= x \\ y &= -ix \end{aligned}$$

Eigenraum zu i: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu i.
Eigenraum zu $-i$: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu $-i$
Grund für c.): Fundamentalsatz der Algebra
Jedes Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ hat n Nullstellen (mit Vielfachheit)

12.12 Satz

$\alpha : V \to V$ linear. Existiert Basis $\mathfrak{B}$ mit :

$$A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(oder untere Dreiecksmatrix),
so sind $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ (Diagonalelemente) die Eigenwerte von α.
***Beweis**:*
$$det(t \cdot E_n - A) = det \begin{pmatrix} t - a_{11} & & -* \\ & \ddots & \\ 0 & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \underset{10.3b, 10.6b}{=} (t - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn})$$
Behauptung folgt mit Satz 12.10

12.13 Satz

Seien $c_1, \ldots, c_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von α.
$V \to V$ (linear), $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu $c_1, \ldots, c_r$
Dann sind $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig.
Beweis
Induktion nach r.
$r = 1 \surd \ (v_1 \neq 0)$
$r - 1 \to r$
Angenommen: $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig.
Induktionsvoraussetzung:

$v_1, \dots, v_{r-1}$ lin. unabhängig.
Dann: $v_r \in \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle, v_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i v_i$
$c_r v_r = \alpha(v_r) = \alpha(\sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i \alpha(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i c_i v_i$
Andererseits:
$c_r v_r = c_r(\sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i c_r v_i$
$v_1, \dots, v_{r-1}$ linear unabhängig.
Koeffizientenvergleich: $a_i c_i = a_i c_r$ für alle $i = 1, \dots, r-1$
Mindestens ein $a_i \neq 0$ Für dieses i folgt: $c_i = c_r$ (Widerspruch!)

12.14 Definition $\alpha : V \to V$ lin. Abb. heißt diagonalisierbar falls es eine Basis $\mathfrak{B}$ von V aus Eigenvektoren (zu verschiedenen Eigenwerten) zu α gibt.

D.h. $A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix}$ (c_i nicht notw. verschieden)

12.15 Satz
$dim(V) = n$, $\alpha : V \to V$ lin. Abb. Besitzt α n verschiedene Eigenwerte, dann ist α diagonalisierbar.

Beweis Folgt aus 12.13 □

Dies ist nur eine hinreichende Bedingung, aber keine notwendige! D.h. es gibt Matrizen die diagonalisierbar sind, aber nicht n verschiedene Eigenwerte haben.

Beispiel $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ char. Pol. $(t-1)^2$
α ist nicht diagonalisierbar.
Angenommen es existiert Basis $\mathfrak{B}$ mit $A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann $\alpha = id_V$ ↯

12.16 Definition $A \in M_n(K)$ heißt diagonalisierbar, falls

$$\alpha_A : \begin{cases} K^n \to K^n \\ x \mapsto Ax \end{cases}$$

diagonalisierbar ist.

12.17 Satz
a) $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ es existiert inv. Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist.

b) Hat A n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

Beweis

a) $\mathfrak{B}$ kan. Basis von K^n. $A = A_{\alpha_A}^{\mathfrak{B}}$
A diag. $\Rightarrow$ ex. Basis $\mathfrak{B}'$ mit $A_{\alpha_A}^{\mathfrak{B}'}$ Diagonalmatrix

Setze $S = S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$
$S^{-1}AS = S_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} A^{\mathfrak{B}}_{\alpha_A} S_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = A^{\mathfrak{B}'}_{\alpha_A}$ Diagonalmatrix
Umgedreht: Jede inv. Matrix beschreibt Wechsel von $\mathfrak{B}$ zu anderen Basis.

b) Folgt aus 12.15 □

§13 Orthogonale Abbildungen auf Euklidischen Vektorräumen

13.1 Definition V Eukl. VR (über $\mathbb{R}$), Skalarprodukt $(\,|\,)$
$\alpha : V \to V$ linear
α heißt **orthogonale Abbildung**, falls

$$(\alpha(v)|\alpha(w)) = (v|w) \text{ für alle } v, w \in V$$

13.2 (Folgerung)

a) Orth. Abb. erhalten die Länge von Vektoren (d.h. $\|v\| = \|\alpha(v)\|$)

$$\left(\|v\| = \sqrt{(v|v)}\right)$$

b) Orth. Abb. erhalten Winkel zwischen zwei Vektoren (d.h. $\sphericalangle(v, w) = \sphericalangle(\alpha(v), \alpha(w))$)
$\varphi = \sphericalangle(v, w)$
$\cos\varphi = \dfrac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|}$

c) Orthogonale Abbildungen sind bijektiv (nach a): $ker(\alpha) = \{\vec{0}\}$, d.h. α injektiv, dann auch bijektiv)

d) α orth. Abb. $\Rightarrow \alpha^{-1}$ orth. Abb.
($v, w \in V$. α bijektiv $\Rightarrow \exists u, x \in V : \alpha(u) = v, \alpha(x) = w$
$\left(\alpha^{-1}(v)|\alpha^{-1}(w)\right) = \left(\alpha^{-1}(\alpha(u))|\alpha^{-1}(\alpha(x))\right) = (u|x) = (\alpha(u)|\alpha(x)) = (v|w)$

e) α, β orth. Abb. $\Rightarrow$ $\alpha \circ \beta$ orth. Abb.
(Die orthogonalen Abb. bilden eine Gruppe bezüglich $\circ$).

13.3 (Bsp.)

a) id_v orth. Abb. Allg.: Drehung um $\vec{0}$ (im $\mathbb{R}^2$)

b) Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ an Geraden durch $\vec{0}$

Dies sind alle orthogonalen Abbildungen in $\mathbb{R}^2$.

13.4 Satz (Charakterisierung orth. Abb.)
V n-dim. Eukl. VR, $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ ONB, $\alpha : V \to V$ linear,

$$A = A^{\mathfrak{B}}_{\alpha}$$

Dann sind äquivalent:

(1) α *ist orthogonale Abbildung*

(2) $AA^t = A^tA = E_n$
(d.h. $A^t = A^{-1}$*)*

(3) $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ *ist ONB*

(4) $\|\alpha(v)\| = \|v\|$ *für alle* $v \in V$.

Beweis:
"(1) ⇒ (2)" $A = (a_{ij})\ i, j = 1, \dots, n$
$S_{ij} = (v_i|v_j) = (\alpha(v_i)|\alpha(v_j)) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k| \sum_{l=1}^{n} a_{lj}v_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lj}v_l(v_k|v_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} \Rightarrow$
$A^tA = E_n$
$1 = det(A^tA) = det(A^t)det(A) \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ *existiert.* $(A^t = A^{-1} \Rightarrow AA^t = E_n)$
"(2) ⇒ (3)": $A^tA = E_n \Rightarrow \delta_{ij} = (v_i|v_j) = (\alpha(v_i)|\alpha(v_j)) \Rightarrow$ *Behauptung*
"(3) ⇒ (4)" $v = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i \Rightarrow \alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} = c_i\alpha(v_i)$
$\|\alpha(v)\| = \sqrt{(\alpha(v)|\alpha(v))} \underset{\alpha(v_i) ONB}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} = \sqrt{(v|v)} = \|v\|$
(4) ⇒ (1) : 7.7*d*) : $(v|w) = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \Rightarrow$ *Behauptung.*

13.5 Definition nxn Matrix A über K heißt orthogonal, falls $AA^t = A^tA = E_n$

13.6 Korollar α *orthogonale Abbildung auf V,* $\mathfrak{B}$ *ONB,* $A = A_\alpha^\mathfrak{B}$

a.) $det(\alpha) = det(A) = \pm 1$

b.) α *hat höchstens Eigenwerte:* $1, -1$

Beweis:

a.) $1 - det(A^tA) \underset{10.10}{=} det(A^t) \cdot det(A) \underset{10.5}{=} det(A)^2 \Rightarrow det(A) = \pm 1$

b.) *c Eigenwert von* α*, v zugehöriger Eigenvektor.*
$\|v\|\, \|\alpha(v)\| = \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \underset{\|v\| \neq 0}{\Rightarrow} |c| = 1$

Orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^1$: $id_v, -id_v$
V 2-dimensionaler Euklidischer Raum, $\mathfrak{B} = (v_1, v_2)$ ONB, α orthogonale Abbildung auf V.

13.7 Satz
a.) *Ist* $det(A) = 1$*, so ist* $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
$A = A_\alpha^\mathfrak{B}$ *für ein* $\varphi \in [0, 2\pi]$
α *ist Drehung (um* $\overrightarrow{0}$*) im Winkel* φ.

b.) *Ist* $det(A) = -1$*, so ist*
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi[$
Es gibt ONB $\mathfrak{C} = (w_1, w_2)$, so dass

$$A_\alpha^{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

α Spiegelung an $\langle w_1 \rangle$
Es gilt: v_1 und Spiegelachse w_1 schließen Winkel $\frac{\varphi}{2}$ ein.
(Ist (v_1, v_2) positiv oritientiert, dass heißt bewegt man sich von v_1 nach v_2 entgegen des Uhrzeigersinns, so ist Winkel $\frac{\pi}{2}$, so ist α Drehung entgegen Uhrzeigersinn (um φ), sonst im Uhrzeigersinn.)
Beweis im WHK, 10.67

13.8 Satz

V ist 3-dimensionaler Euklidischer VR.
α orthogonale Abbildung auf V.
Dann tritt einer der folgenden Fälle ein.

a.) Es existiert ONB $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V mit

$$A = A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$
Es ist $det(A) = 1$

b.) Es existiert ONB $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, v_3)$, so dass

$$A = A_\alpha^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$
Es ist $det(A) = -1$

Bedeutung:

a) Drehung um φ in der $< v_1, v_2 >$-Ebene um Achse $< v_3 >$

b) Drehspiegelung, Drehung um φ um die Achse $< v_3 >$ + Spiegelung an $< v_1, v_2 >$-Ebene

Spezialfälle:

a) $\varphi = \pi: \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(Achsenspiegelung an $< v_3 >$)*

b) $\varphi = 0: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(Spiegelung an $< v_1, v_2 >$-Ebene)*

$\varphi = \pi: \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(Punktspiegelung an $\vec{0}$)*

13.9 Bemerkung a) Für geometrische Anwendungen reichen orthogonale Abbildungen i. Allg. nicht aus. Man benötigt z.B. Translationen
Wähle $b \in V$:

$$t_b(v) = v + b \qquad \text{Translation um } b$$

Für $b \neq 0$ ist t_b keine lineare Abb.
Komposition von linearen Abbildungen mit Translationen: affine Abbildungen
$\beta(v) = \alpha(v) + b = (t_b \circ \alpha)(v)$, α lin. Abb. $b \in V$

b) Affine Abbildungen bilden affine Unterräume auf affine Unterräume ab.
affine UR.: $\underbrace{w + U}_{\{w+u:\ u \in U\}}$, U Vektorunterraum, $w \in V$
$\beta(w + U) + t_b\,(\alpha(w) + \alpha(U)) = \alpha(w) + b + \underbrace{\alpha(U)}_{Veltorunterraum}$ $\curvearrowright$ affine Geometrie (WHK Kap. 12)
Eukl. VR. Wichtig: Kongruenzabbildungen : $t_b \circ \alpha$, α orth. Abb.
Kongruenzabb. kann den Abstand zwischen Vektoren unverändert ebenso die Winkel.
Abstand von v, w : $||v - w||$
$||(t_b \circ \alpha)(v) - (t_b \circ \alpha)(w)|| = ||b + \alpha)(v) - b - \alpha)(w)|| = ||\alpha(v) - \alpha(w)|| = ||\alpha(v - w)|| \underbrace{=}_{orth.Abb.} ||v - w||$

c) Hintereinanderausf. affiner Abb. (Kongruenzabb.) ist wieder affine Abb. (Kongruenzabb.):
$\Big((t_{b'} \circ \alpha') \circ (t_b \circ \alpha)\Big)(v) = (t_{b'} \circ \alpha')(\alpha(v) + b) = \alpha'(\alpha(v) + b) + b' = (\alpha' \circ \alpha)(v) + \alpha'(b) + b' = \Big(t_{\alpha'(b)+b'} \circ (\alpha' \circ \alpha)\Big)(v)$

d) Affine Abb. auf n-dim VR lassen sich nicht durch nxn-Matrix beschreiben. Es gibt Möglichkeit der Beschreibung durch $(n + 1) \times (n + 1)$-Matrizen:

$\mathfrak{B}$ Basis von V, $\beta = t_b \circ \alpha$, $b \in V$, $\alpha : V \to V$ linear.

$$K_{\mathfrak{B}}(b) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A = A_\alpha^{\mathfrak{B}}$$

$$\beta \to \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\beta' = t_{b'} \circ \alpha' \quad K_{\mathfrak{B}}(b') = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \quad A' = A_{\alpha'}^{\mathfrak{B}}$$

$$\beta' \to \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b'_1 \\ & A' & & \vdots \\ & & & b'_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\beta' \circ \beta \to \left(\begin{array}{ccc|c} & A' \cdot A & & K_{\mathfrak{B}}\left(\alpha'(b) + b'\right) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} & A' \cdot A & & A' K_{\mathfrak{B}}(b) + K_{\mathfrak{B}}(b') \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} & A' & & K_{\mathfrak{B}}(b') \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \bullet \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & K_{\mathfrak{B}}(b) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hintereinanderausführung entspricht dem Produkt der $(n+1) \times (n+1)$-Matrix.

§14 Mehrdimensionale Analysis

$\mathbb{R}^n$:
Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$
Funktionen: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Längenbegriff: $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = +\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Abstand: $\|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

14.1 Definition $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall i \geq n(\varepsilon) :$ $\|a_i - c\| < \varepsilon$.

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\lim\limits_{i \to \infty} (a_i) = c$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{i \to \infty} \underset{(a_{i,j})}{\text{Konvergenz von Folen in}} \mathbb{R} \to c_j$ für $j = 1, \ldots, n$
Beispiel:
$\mathbb{R}^3$: $a_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \\ 0 \\ 1 - \frac{1}{i} \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{i \to \infty} a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

14.2 Beispiel
(Vektoren werden oft als Zeilenvektoren geschrieben)

a.) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (skalare Funktionen)
z.B.:
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, D = \mathbb{R}^3$
$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Graphische Darstellung für Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ möglich.

b.) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m > 1$ (vektorwertige Funktionen)
$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2, \sin(x_1 x_2), x_1 + 1)\ \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

c.) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (ebene Kurven)
$f(t) = (\sin(t), \cos(t)),\ \ t \in [0, 2\pi]$ (Einheitskreis)
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (Raumkurve)

14.3 Definition

a.) $D \subseteq \mathbb{R}^n\ \ a \in \mathbb{R}^n$ heißt Adhärenzpunkt von D, falls eine Folge $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}, d_i \in D$ existiert mit $(d_i) \to a$
Beispiel: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ Adhärenzpunkte: $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

b.) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a Adhärenzpunkt von D $\lim_{x\to a} f(x) = c (\in \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow$ Für jede Folge $(d_i) \to a, d_i \in D,$ ist $(f(d_i)) \to c$

c.) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in D$
f heißt stetig in $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

14.4 Bemerkung

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$x \in D,\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = c_i, i = 1, \ldots, n$$

14.5 (Beispiel)

a) **Monom**: $f(x_1, \ldots, x_n) = a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$, wobei $a \in \mathbb{R},\ m_i \in \mathbb{N}_0$
Polynom: endliche Summe von Monomen, Polynome sind überall stetig.
z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^8 + 6x_3 - 1$

b) Allg. sind Summe, Produkt, Quotient (wo Nenner $\neq 0$) von skalaren stet. Funktionen stetig.
$f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$ stetig auf $\mathbb{R}^2$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_i \to 0 & \\ f(a_i) \to 0 \text{nicht stetig} & \\ f(0) = 1 & \end{cases}$ nicht stetig

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f ist stetig in allen Punkten $\neq (0,0)$

ex. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} \quad f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) \to \frac{1}{2}$

$\left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$f\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = 0 \quad f\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \to 0$

f ist nicht stetig in $(0,0)$

14.6 Definition

a) $a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0,\ r \in \mathbb{R}$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x-a\| < r\}$

offene Kugel von Radius r und Zeitraum a.

$(1-dim\ ]a-r, a+r[)$

b) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls es zu jedem $a \in D$ ein $r > 0$ gibt mit $B(a,r) \subseteq D$

Beispiel $\{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0\}$ offen

14.7 Definition $f :\ D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ D$ offen.
$a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$

a) f heißt partiell differenzierbar nach x_j an Stelle a

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \lim_{t \to a_j} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{t - a_j}$$

Partielle Ableitung von f nach x_j an Stelle a existiert.

b) Falls f partiell differenzierbar bezüglich aller x_j an a: $\left(\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right) = (Grad\ f)(a)$

Gradient

c) Ist f an allen $a \in D$ partiell differenzierbar nach allen x_j, so ist $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}$

Fkt. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ Gradient von f

14.8 (Bsp)

a) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot \cos(x_1 x_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cdot \cos(x_1 x_2)$
$grad\ f = (x_2 \cdot \cos(x_1 x_2), x_1 \cdot \cos(x_1 x_2)$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = ln(x_2^2) \cdot x_1 + x_1 x_2 x_3^5$
$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = ln(x_2^2) + x_2 + x_3^5$
$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = x_1 \frac{2x_2}{x_2^2} + x_1 x_3^5$
$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = 5x_1 x_2 x_3^4$

c) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$
$(x_1, x_2) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \ \frac{\partial_f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ existieren.
$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$
$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = 0$
f ist überall partiell differenzierbar, aber nicht stetig in $(0,0)$.

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Differenzierbarkeit in a: Es existiert eine Tangente am Graph von f im Punkt $(a, f(a))$
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Existenz von partiellen Ableitungen an a: Es existiert eine Tangente in x-Richtung und in y-Richtung, aber nicht notwendig eine Tangentialebene an Graph von f im Punkt $(a, f(a))$

$f(x,y) = 1 - min(|x|, |y|) \to$ keine Tangentialebene in $(0,0)$, aber Tangenten in x - und y- Richtung.
$f(x,y) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \to$ überall Tangentialebenen.

14.9 Satz

a.) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offene, heißt stetig differenzierbar, falls f partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

b.) f heißt 2-mal stetig differenzierbar, falls f stetig differenzierbar und alle partiellen Ableitungen stetig differenzierbar sind .
Partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, davon partielle Ableitung nach x_k: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $k = j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j}^2$ (für alle $s \in \mathbb{N}$)

14.10 Beispiel

a.) Polynomfunktionen sind 2-mal (s-mal, $s \in \mathbb{N}$) stetig diffbar.

b.) Beispiel 14.8b) ist beliebig oft stetig differenzierbar.

c.) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1, x_2) + e^{x_2}$
$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2 \cdot \cos(x_1 x_2)$

$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = x_1 \cdot \cos(x_1 x_2) + e^{x_2}$
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1}^2 = -x_2^2 \sin(x_1 x_2)$
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2}^2 = -x_1^2 \sin(x_1 x_2) + e^{x_2}$
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = \cos(x_1 x_2) - x_2 x_1 \sin(x_1 x_2)$
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \cos(x_1 x_2) - x_2 x - 1 \sin(x_1 x_2)$

14.11 Satz (Schwarz)
$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, 2mal stetig differenzierbar.
Dann ist :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

14.12 Satz
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in D$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \overbrace{(Grad(f)(a)}^{(1)} \cdot \overbrace{(x - a)}^{(2)}}{\|x - a\|} = 0$$

(1) $\in \mathbb{R}$: als Zeilenvektor auffassen.
(2) Spaltenvektor

f lässt sich in der Nähe von a gut durch $f(a) + Grad(f(a)) \cdot (x - a)$approximieren.
$[= f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}(x_n - a_n)]$
$n = 2$
$E(x_1, x_2) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}(x_2 - a_2)$ *(Ebene in $\mathbb{R}^3$)*
$(x_3 - \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} x - 1 - \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} x_2 = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} \cdot a_2$
(Ebene Lösung inhomogener Gleichung) (Tangentialebene an Graph von f an $(a, f(a))$)

14.13 Korollar *f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig.*

14.14 Beispiel
$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_3^2$
$a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2$
$E(x_1, x_2) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{\partial f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial x_1}(x_1 - \frac{1}{2}) + \frac{\partial f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial x_2}(x_2 - \frac{1}{2})$
$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - (x_1 - \frac{1}{2}) - (x_2 - \frac{1}{2}) = -x_1 - x_2 + \frac{3}{2}$
$E(x_1, x_2) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ (Punkte der Ebene)

14.15 Definition $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.

$$H(f) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,\ldots,n}$$

Hesse Matrix von f.
$a \in D: \quad H(f)(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$ (nxn-Matrix über $\mathbb{R}$)
$H(f)(a) = H(f)(a)^t$ (nach Satz von Schwarz)
Symmetrische Matrix

14.16 Satz
Eine symmetrische nxn-Matrix über $\mathbb{R}$ hat n reelle Eigenwerte. (mit Vielfachheit) Das heißt das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearefaktoren (Beweis im WHK)

14.17 Definition $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$
$a \in D$ heißt lokale Minimum/Maximumstelle, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $B(a, r)$, so dass $f(x) \geq f(a)$ oder $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in B(a, r)$.
$f(a)$ lokales Minimum/Maximum (lokale Extremalstellen)

14.18 Satz
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$

a.) Sei f stetig differenzierbar. Ist $a \in D$ lokale Extremalstelle von f, so ist $Grad(f)(a) = (0, \dots, 0)$

b.) Sei f 2mal stetig differenzierbar, $grad(f)(a) = (0, \dots, 0)$

(1) Hat $H(f)(a)$ lauter positive Eigenwerte, so ist a lokale Minimalstelle.
(2) Hat $H(f)(a)$ lauter negative Eigenwerte, so ist a lokale Maximumstelle.
(3) Hat $H(f)(a)$ sowohl negative als auch positive Eigenwerte, so ist a weder lokales Maximum noch lokales Minimum (Sattelfläche)
(4) Hat $H(f)(a)$ nur nicht-negative Eigenwerte oder nur nicht-positve Eigenwerte und kommt der Eigenwert 0 mindestens einmal vor, dann ist keine Aussage hierüber mit $H(f)(a)$ möglich.

14.19 Beispiel

a.) $f(x_1, x_2) = x_1^2, x_2^2$
$Grad(f) = (2x_1, 2x_2) \stackrel{?}{=} (0, 0) \quad (x_1 = 0, x_2 = 0)$
$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H(f)(0, 0)$ Eigenwert 2 $(0, 0)$ lokale Minimumstelle

b.) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
$Grad(f) = (2x_1 - 2x_2) = (0, 0) \quad x_1 = 0, x_2 = 0$
$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H(f)(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$ keine lokales Minimalstelle.

c.) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 + 2x_1$
$Grad(f) = (2x_1 + 2, 4x_2^3) = (0, 0) \quad (x_1 = -1, x_2 = 0)$
$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$

$H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Eigenwerte somit 2 und 0, keine Aussage mit 14.18 machbar)
$Grad(f(a))$ Vektor, der die Richtung des steilsten Anstiegs in $(a, f(a))$ des Graphen von f angibt.

Index