Eberhard Karls Universität Tübingen

# Mathematik II

im Sommersemester 2014

Dr. Britta Dorn

**Mitschrift:** Felicia Saar
**E-Mail:** felicia.saar@gmx.de
**Vielen Dank an** Tiemo Schroeder, Julia Maier, Benjamin Mitzkus, Tim Beckmann

Letzte Änderung: 10. September 2014

Bei diesem Dokument handelt es sich um eine inoffizielle Mitschrift der Vorlesung Mathematik II, gehalten von Dr. Britta Dorn im Sommersemester 2014.
Sie enthält selbstverständlich Fehler und ist daher für Klausuren und Übungsblätter nicht zitierfähig.
Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an felicia.saar@gmx.de

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I

# Analysis

## Wiederholung Folgen und Reihen aus Mathe I

### Folgen

**Folgen** $(a_n)_{n\geq k}$ sind Abbildungen

$$\{n \in \mathbb{Z} | n \geq k\} \to \mathbb{R} \quad (\text{meist } n \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } n \in \mathbb{N}).$$

Die $a_n$ heißen *Glieder* der Folge.

#### Beispiel

- $a_n = 3 \;\; \forall n \geq 1 \qquad (3, 3, 3, \dots)$
- $a_n = n \;\; \forall n \geq 1 \qquad (1, 2, 3, \dots)$
- $a_n = \frac{1}{n} \;\; \forall n \geq 1 \qquad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

#### Eigenschaften von Folgen

a) $(a_n)_{n\geq k}$ ist nach oben (unten) beschränkt, falls
$\exists\, S \in \mathbb{R} : a_n \leq S \; \forall n \geq k$
$(\exists\, s \in \mathbb{R} : a_n \geq s \; \forall n \geq k)$

b) $(a_n)_{n\geq k}$ ist *beschränkt*, falls nach oben <u>und</u> unten beschränkt, d.h.
$\exists\, c \in \mathbb{R} : |a_n| \leq c \quad \forall n \geq k$
also $\quad -c \leq a_n \leq c \quad \forall n \geq k$

c) $(a_n)_{n\geq k}$ ist *alternierend*, falls die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

d) $(a_n)_{n\geq k}$ ist *(streng) monoton steigend*, falls
$$a_{n+1} \underset{(>)}{\geq} a_n \; \forall n \geq k$$
bzw. *(streng) monoton fallend:*
$$a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n \; \forall n \geq k$$
Eine Folge ist *monoton*, falls sie monoton fallend oder monoton steigend ist.

e) $(a_n)_{n\geq k}$ *konvergiert (ist konvergent)* gegen einen Grenzwert $a$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists\, n_0 \geq k \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
schreibe dann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$
sonst ist die Folge *divergent*.
Ist der Grenzwert 0, so ist es eine *Nullfolge*.

f)
- Folge konvergiert $\Rightarrow$ Folge beschränkt, aber
  Folge beschränkt $\not\Rightarrow$ Folge konvergiert! (Betrachte z.B. $a_n = (-1)^n$)
- Folge nicht beschränkt $\Rightarrow$ Folge divergent
- Folge beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge (Bolzano - Weierstraß)
- Folge monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt $\Rightarrow$ Folge konvergent

## Reihen

**Reihen** sind Summen über Folgen:

Sei $(a_n)_{n\geq k}$ eine Folge. Summiere die ersten $n$ Folgenglieder.

$S_n = \sum_{i=k}^{n} a_i \ \forall n \geq k$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_k}_{S_k} + a_{k+1}}_{S_{k+1}} + a_{k+2}}_{S_{k+2}} + \cdots + a_n}_{S_n}$$

Die Folge $(S_n)_{n\geq k} = (S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, ...)$ heißt *unendliche Reihe*,
geschrieben : $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

Falls $(S_n)_{n\geq k}$ konvergiert, wird auch ihr Grenzwert mit $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ bezeichnet.

**Beispiel**

a) $\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + \ldots$ divergiert

b) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$ divergiert:

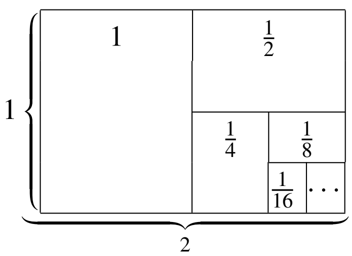
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) Harmonische Reihe:
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ divergiert :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{8}} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ also divergent.

d) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$
ist konvergent und
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ der Grenzwert.
Siehe auch f).



e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert.

f) geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i;\ q \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} |q| < 1 : \text{konvergiert gegen } \frac{1}{1-q} \text{ (siehe 4.)} \\ |q| \geq 1 : \text{divergiert.} \end{cases}$$

g) allgemeine harmonische Reihe:

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert $\forall s > 1$

alternierende harmonische Reihe:

$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i}$ konvergiert $(= -\ln 2)$

Es gilt: $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Rightarrow (a_i)_{i \geq k}$ ist Nullfolge
$\not\Leftarrow$ (vgl. Beispiel c))

**Konvergenz- / Divergenzkriterien**

a) *Divergenzkriterium:*

Ist $(a_i)_{i \geq k}$ keine Nullfolge, so ist $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ divergent.

**Beispiel:** $\sum_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{i})$ ist divergent $\quad (\lim_{i \to \infty} (1 + \frac{1}{i}) = 1)$

b) *Majorantenkriterium:*

Seien $(a_i)_{i \geq k}, (b_i)_{i \geq k}$ Folgen mit $|a_i| \leq b_i\ \forall i \geq k$

dann gilt: ist $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, dann auch $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ und $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

c) *Leibnizkriterium für alternierende Reihen:*

Sei $(a_i)_{i \geq k}$ eine monoton fallende Nullfolge, $a_i \geq 0\ \forall i$,

dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$

**Beispiel**

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i+1}$ konvergiert gegen $\ln 2$
- Leibniz-Reihe:
  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i+1}$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{4}$

d) *Absolute Konvergenz:*

$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

Es gilt: Reihe konvergiert absolut $\Rightarrow$ Reihe konvergiert.
$\not\Leftarrow$ vgl. Beispiel 7, alternierende harmonische Reihe

a) *Wurzelkriterium:*

- falls ein $q < 1$ und ein Index $i_0$ existieren mit $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q\ \forall i \geq i_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

  $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ reicht nicht aus!

  z.B. harmonische Reihe (3), $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} \to 1$, man findet kein $q < 1$

- gilt $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele $i$, so divergiert die Reihe.

b) *Quotientenkriterium*:

- falls ein $q < 1$ und ein Index $i_0$ existiert mit $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq q \ \forall i \geq i_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.

  $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| < 1$ reicht nicht aus!

- für $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \geq 1$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich.

# 1 Potenzreihen

## 1.1 Definition

Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge, $a \in \mathbb{R}$, dann heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$$

eine *Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt a* mit der *Koeffizientenfolge* $(b_n)_{n\geq 0}$

oft: $a = 0$, dann

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \ldots$$

Für welche Werte von $x$ konvergiert die Potenzreihe $P(x)$?
Klar, falls $x = a$, dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \underbrace{b_0 \cdot 0^0}_{b_0} + \underbrace{b_1 \cdot 0^1 + b_2 \cdot 0^2 + b_3 \cdot 0^3 + \ldots}_{0} = b_0$$

konvergent. Sonst hängt es von der Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ ab.

## 1.2 Beispiele

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (x-0)^n$ (d.h. $b_n = 1 \ \forall n \geq 0,\ a = 0$)
konvergiert für alle $x$ mit $|x| < 1$ (geometrische Reihe), also für $x \in ]-1,1[$ ($\rightarrow$ Konvergenzintervall), sonst divergiert sie.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ (d.h. $b_n = 2^n,\ a = 0$) $= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
konvergiert für alle $x$ mit $|2x| < 1$, also $|x| < \frac{1}{2}$, also für $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, sonst divergent.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (d.h. $b_n = \frac{1}{n!}$, $a = 0$)

konvergiert für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$

Benutze das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

Gibt es ein $q < 1$ und einen Index $n_0$, sodass $\frac{|x|}{n+1} \leq q \ \forall n \geq n_0$ gilt?

Ja. Wähle $n_0$ so, dass $n_0 + 1 > 2 \cdot |x|$, dann:

$\frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{n_0+1} < \frac{|x|}{2 \cdot |x|} = \frac{1}{2} = q \quad \forall n \geq n_0$

also konvergiert die Reihe.

### 1.3 Definition

Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$, dann heißt

$$R := \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy Hadamard)}$$

der *Konvergenzradius* der Reihe.

(Dabei sei hier $\frac{1}{0} := \infty$, also $R = \infty$, wenn Nenner = 0)

oft einfacher:

$$R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| \qquad \text{(Formel von Euler)}$$

### 1.4 Satz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe ($a = 0$)

Dann gilt:

i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ absolut.
(d.h: Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, die im Konvergenzintervall $]-R, R[$ liegen. Ist $R = \infty$, so heißt das für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$!)

ii) Für alle $x$ mit $|x| > R$ divergiert die Reihe.

iii) Für $|x| = R$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich. Das Konvergenzintervall der Reihe kann $]-R, R[, [-R, R], ]-R, R], [-R, R[$ sein.

**Beweis**

mit Wurzelkriterium:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n|$ konvergiert, falls es ein $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass
$\sqrt[n]{|b_n x^n|} \leq q \quad \forall n \geq n_0$
d.h.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n x^n|} \leq q &\iff |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq q < 1 \\ &\iff |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} \end{aligned}$$

(Eulerformel: Übung)

ii) analog

iii) Übung, Bsp. suchen

## 1.5 Bemerkung

Ist $R$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, so konvergiert die Reihe absolut für $|x| < R$ und divergiert für $|x| > R$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ konvergiert dann absolut für $|x-a| < R$ und divergiert für $|x-a| > R$

Für $x = a - R$ und $x = a + R$ ist keine allgemeingültige Aussage möglich

## 1.6 Beispiele

Beispiele 1.2 a-c) mit der Formel für $R$ nachrechnen! (PÜ)

## 1.7 Wichtiges Beispiel: Die Exponentialreihe

vgl. Beispiel 1.2 c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (b_n = \frac{1}{n!}, a = 0)$$

$R = \infty$, Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Deshalb kann man für $x \in \mathbb{R}$ folgende Funktion betrachten:

$$\begin{aligned} \exp: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \exp(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

(*Exponentialfunktion*, bzw. *Exponentialreihe* als Bez. für $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

**Eigenschaften**

1) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
   (Beweis mit Cauchyprodukt und Rechnen, siehe PÜ)

2) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

   *Beweis.*
   $\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots = 1$

   $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) \overset{1)}{=} \underline{\underline{\exp(x) \cdot \exp(-x)}}$

   $\Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

   für $x > 0$ : nur positive Terme in der Summe
   $x < 0$ : $\frac{1}{\exp(x')} = \exp(-x') > 0$
   $\Rightarrow \exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

   $\square$

3) • für $x = 1$ erhält man

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{0!}}_{1} + \frac{1}{1!}}_{2} + \frac{1}{2!}}_{2{,}5} + \frac{1}{3!}}_{2{,}\overline{6}} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}}_{2{,}71828\ldots}}_{} + \ldots =: e$$

(die *Eulersche Zahl*)

$e \approx 2{,}71828\ldots$ ist irrational (d.h. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

• für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\exp(n) &= \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}) \overset{1}{=} \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1)}_{n \text{ mal}} \\
&= e \cdot e \cdot e \cdot \ldots \\
&= e^n \\
\exp(0) &= 1 = e^0 \\
\exp(-n) &= \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}
\end{aligned}$$

Daher schreibt man auch $e^x = \exp(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$e$ ist neben $\pi, 0, 1$ eine der wichtigsten mathematischen Konstanten.

4) Man kann zeigen: $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

# 2 *Reelle Funktionen* und *Grenzwerte* von *Funktionen*

## 2.1 Definition

Eine *reelle Funktion einer Veränderlichen* ist eine Abbildung
$f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$
oft ist $D$ eine endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

$D = ]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ $\qquad D = \mathbb{R}$
$D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty]$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

## 2.2 Definition

(neue Funktion aus alten gewinnen)
Seien $f, g : \quad D \to \mathbb{R}$

a) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$
*Differenzsumme* von $f$ und $g$

genauer $f \pm g : D \to \mathbb{R}$,
$x \mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

b) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
*Produkt* von $f$ und $g$

c) falls $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$, dann
$(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$
*Quotient* von $f$ und $g$

d) *Komposition / Hintereinanderausführung*
$f : D_f \to \mathbb{R}$,
$g : D_g \to \mathbb{R}$, wobei $f(D_f) \subseteq D_g$

$$\underbrace{D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{\xrightarrow{g \circ f}}$$

$g \circ f : \quad D_f \to \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto g(f(x))$ "$g$ nach $f$"

$(g \circ f)(x) = g((f(x)))$

## 2.3 Beispiel

$$\begin{aligned} f,g: \quad D &= \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2(x-1) \\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{x^2}{x-1} \text{ für } x \neq 1 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \neq (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

## 2.4 Elementare Funktionen

### 2.4.1 konstante Funktionen

für $c \in \mathbb{R}$ (fest) :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

### 2.4.2 Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Durch mehrfache Anwendung von 2.2 entstehen aus 2.4.1 und 2.4.2 viele weitere Funktionen.

### 2.4.3 Potenzen (Monome)

für $n \in \mathbb{N}$ (fest): $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$

- $n = 0:$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^0 = 1$, die konstante 1-Funktion
- $n$ ungerade: $f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- $n$ gerade: $f$ ist achsensymmetrisch zur $y$-Achse, $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

### 2.4.4 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome.

Dazu muss die Gleichung

$$x^n = b \qquad (b \in \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

gelöst werden.

- $n$ ungerade: ($f$ injektiv)
  dann gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = b$,
  dieses wird die $n$-te Wurzel aus $b$ genannt,
  $x = \sqrt[n]{b}$.
  $$\begin{aligned} \sqrt[n]{\phantom{x}} \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$
- $n$ gerade: ($f$ ist nicht injektiv! z.B. $f(-1) = f(1) = 1$)
  dann hat die Gleichung $x^n = b$ in $\mathbb{R}$
  - keine Lösung, falls $b < 0$
  - genau eine Lösung, falls $b = 0$ (nämlich $x = 0$)
  - zwei Lösungen, falls $b > 0$ : $\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n]{b} \quad (> 0) \\ x_2 &= -\sqrt[n]{b} \quad (< 0) \end{aligned}$
    Die positive Lösung wird hier dann als $n$-te Wurzel bezeichnet,
    $$\begin{aligned} \sqrt[n]{\phantom{x}} \ : \ & \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \quad (= [0, \infty[) \\ & x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

### 2.4.5 Polynome

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ "Koeffizienten"
Polynom ist Funktion

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt $n$ *Grad* des Polynoms.

### 2.4.6 Rationale Funktionen

*Rationale Funktionen* sind Quotienten von Polynomen, also

$$\begin{aligned} f : \ & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \quad p, q \text{ Polynome} \end{aligned}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

### 2.4.7 Exponentialfunktionen

*Exponentialfunktionen* sind Funktionen

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto q^x \end{array} \quad \text{wobei die Basis } \mathbb{R} \ni q > 0, (q \neq 1) \text{ ist.}$$

vgl. 1.7: $\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

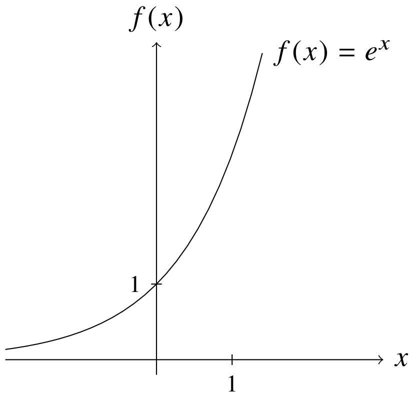
(allgemein gilt: Potenzreihen definieren auf ihrem Konvergenzintervall Funktionen)

#### Rechenregeln

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}, \quad \frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x, \quad (\frac{p}{q})^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, später mehr.)

früher: Basis 10
heute : $e$, in der Informatik oft 2




Graph von $f(x) = \exp(x) = e^x$

### 2.4.8 Logarithmen

#### Die Exponentialfunktion

$$\exp: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto e^x \end{array} \quad \text{ist bijektiv.}$$

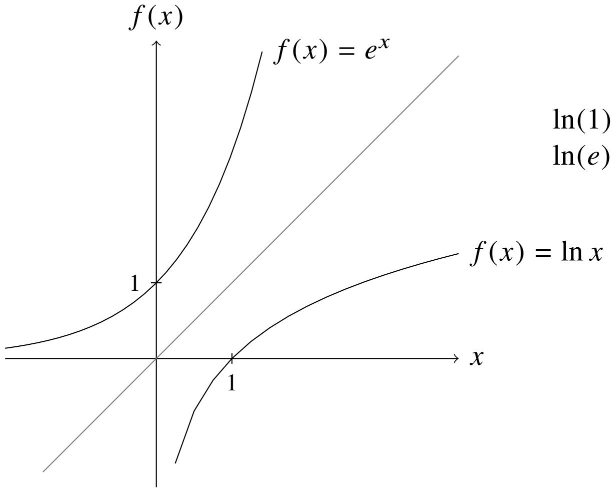
Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $b \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $e^x = b$ gelöst werden.

Die Lösung ist für $b > 0$ in $\mathbb{R}$ eindeutig und wird als der *natürliche Logarithmus* von $b$ bezeichnet, (in $\mathbb{R}$ für $b < 0$ unlösbar)

$$x = \ln b$$

**Die Logarithmusfunktion**

$$\begin{aligned} \ln :\ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x\ & \mapsto \ln x \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(e) &= 1 \end{aligned}$$

Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto q^x \qquad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$q^x = b \iff x = \log_q b \qquad \text{(Logarithmus zur Basis } q\text{)}$$

Es genügt wieder, eine feste Basis zu betrachten, z.B. $e$, denn:

$$\begin{aligned} q^x &= (\underbrace{e^{\ln q}}_{q})^x = e^{x \cdot \ln q} \\ q^x = b \Leftrightarrow\ & e^{x \ln q} = b \\ \Leftrightarrow\ & \ln(e^{x \cdot \ln q}) = \ln b \\ \Leftrightarrow\ & x \ln q = \ln b \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\ln b}{\ln q} \end{aligned}$$

Also

$$\log_q b = \frac{\ln b}{\ln q}$$

<u>Rechenregeln</u> für den Logarithmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

$$\begin{aligned} &\text{Sei} && u := \ln x, \quad v = \ln y \\ &\text{dann ist} && x = e^u, \quad y = e^v \\ &\text{und damit} && x \cdot y = e^u \cdot e^v = e^{u+v}, \\ &\text{also} && \underline{\underline{\ln(x \cdot y)}} = \ln(e^{u+v}) = u + v = \underline{\underline{\ln x + \ln y}} \end{aligned}$$

genauso kann man mit beliebiger Basis $q$ $(> 0, \neq 1)$ verfahren,

wir erhalten für jede Logarithmusfunktion

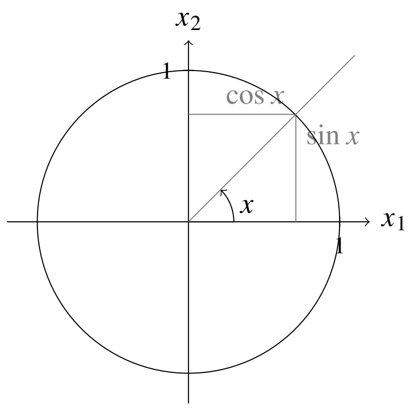
$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ :

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \qquad \forall x, y > 0$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \qquad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \qquad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

### 2.4.9 Trigonometrische Funktionen

Wir betrachten einen Punkt $P$ auf dem Einheitskreis (Kreis um O, Radius 1). Der Winkel, der von der positiven $x$-Achse und $(OP)$ eingeschlossen wird, sei $x$.

Dann heißt die $x_1$-Koordinate von $P$ der Kosinus von $x$ $(\cos x)$
$x_2$-Koordinate Sinus von $x$ $(\sin x)$



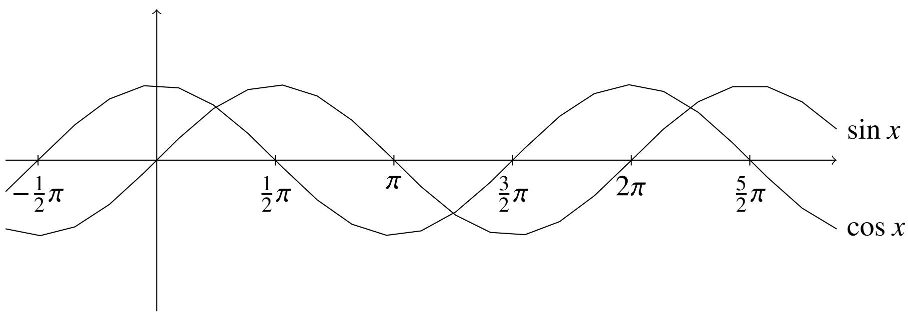

Der Winkel $x$ kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von 1 bis $P$) gemessen werden, es gilt $\frac{\text{Gradmaß}}{360°} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$

So lassen sich cos und sin definieren:

$$\begin{aligned} \cos : \ & \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ & x \mapsto \cos x \\ \sin : \ & \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ & x \mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter:

$$\left.\begin{aligned} \tan x &:= \tfrac{\sin x}{\cos x} \quad \text{(Tangens)} \\ \cot x &:= \tfrac{\cos x}{\sin x} \quad \text{(Kotangens)} \end{aligned}\right\} \text{nur dort definiert, wo Nenner} \neq 0$$




$$\text{Es gilt: } \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

sin und cos sind $2\pi$-periodisch, das heißt:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x+2\pi))\ \forall x \\ \cos x &= \cos(x+2\pi)\ \forall x \end{aligned}$$

tan ist $\pi$-periodisch:

$$\tan x = \tan(x+\pi)\ \forall x \text{ im Definitionsbereich}$$

**Additionstheoreme**

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$
$(\sin^2 x \ + \ \cos^2 x \ = 1)$ (Satz des Pythagoras)

## 2.5 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0, a \in \mathbb{R}$

i) $f$ heißt *konvergent gegen a für* $x \to x_0$, wenn gilt:

   für alle Folgen $(x_n)_n$ aus $D$, die gegen $x_0$ konvergieren, konvergieren die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $a$, also $f(x_n) \to a$ für $x_n \to x_0$ (Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$)

ii) Analog lässt sich der Grenzwert für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ definieren:

   $f$ konvergiert gegen $a$ für $\begin{cases} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$ falls für alle Folgen $(x_n)_n$ mit

$$x_n \to \begin{cases} +\infty \\ (-\infty) \end{cases} \quad (\text{ d.h: } \forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n > k\ \forall n \geq N)$$

   gilt: $\underline{f(x_n) \to a}$ (Schreibweise: $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} f(x) = a$)

## 2.6 Beispiel

a) zu i):

$$\begin{aligned} f : \ &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

   Sei $(x_n)_n$ Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

   Nach den Rechenregeln für Folgen (Vgl. WHK 5.23c)) gilt:

   $f(x_n) = {x_n}^2 \to \underbrace{x_0}_{:=a}{}^2$, also ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = {x_0}^2$

   $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} ({x_n}^2) = (\lim\limits_{n \to \infty} x_n)^2 = (x_0)^2$

   (Allgemein gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle Polynome.)

b) zu ii)

$$f: \;]0,\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

für $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$,
also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

## 2.7 Bemerkung / Definition

Definition 2.5 ist nur interessant für die Punkte $x_0$, für die es Folgen $(x_n)_n$ gibt, die gegen $x_0$ konvergieren. Solche Punkte nennt man *Häufungspunkte* von $D$.

$\bar{D}$= Menge der Häufungspunkte von $D$, heißt *Abschluss* von $D$.

klar: $D \subseteq \bar{D}$ (alle Punkte, die in $D$ liegen, sind bereits Häufungspunkt)

**Beispiel**

a)

| | | |
|---|---|---|
| $D = ]0,\infty[$ | $-1$ | kein HP von $D$ |
| | $1$ | ist HP von $D$ |
| | $0$ | ist HP von $D$ |

b) $D = ]a,b[$, dann sind $a$ und $b$ Häufungspunkte $\bar{D} = [a,b]$

c) $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

## 2.8 Bemerkung / Definition

In Definition 2.5 muss $f(x_n) \to a$ für alle Folgen $(x_n)_n$ aus $D$, die gegen $x_0$ konvergieren, gelten, also insbesondere für Folgen, die von links ($x_n \to x_0$ mit $x_n \leq x_0\ \forall n$) und von Folgen, die von rechts ($x_n \to x_0$ mit $x_n \geq x_0\ \forall n$) gegen $x_0$ konvergieren (falls möglich).

Man spricht von *links- und rechtsseitigen Grenzwerten*.

Schreibweise:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a,\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \text{ (links)}$$
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a,\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \text{ (rechts)}$$

## 2.9 Beispiel

a)
- $D = \mathbb{R},\ x_0 = 0$
  Folge, die von rechts gegen $x_0$ konvergiert z.B $(\frac{1}{n})_n$
  Folge, die von links gegen $x_0$ konvergiert z.B $-(\frac{1}{n})_n$
- $D = [0,\infty[, x_0 = 0$ nur Folgen, die von rechts gegen $x_0$ konvergieren möglich

b) Heaviside-funktion (Schwellenwertfunktion)

$$f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} = ?$

- für $(x_n)_n = \quad (\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(\frac{1}{n}) \quad = 1 \to 1$
- für $(x_n)_n = (-\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = 0 \to 0 \neq 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert also nicht.

### 2.10 Bemerkung / Beispiel

$f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{D}$

Falls für alle Folgen $(x_n)_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, für $x \to x_0$

$$f(x_n) \to \begin{cases} \infty \\ (-\infty) \end{cases} \quad \text{gilt ,}$$

wird auch die Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ (-\infty) \end{cases}$ benutzt,

man sagt, $f(x)$ *divergiert bestimmt gegen* $\infty(-\infty)$ für $x$ gegen $x_0$

(Analog für $x \to \infty, x \to -\infty$ siehe z.B. WHK Def. 6.13/6.13)

**Beispiel**

$f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

- falls $D = ]0, \infty[$, dann $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$
- falls $D = ]-\infty, 0[$. dann $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- falls $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht.

# 3 Stetigkeit

### 3.1 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in D$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

f heißt (überall) *stetig in* $D$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

### 3.2 Bemerkung

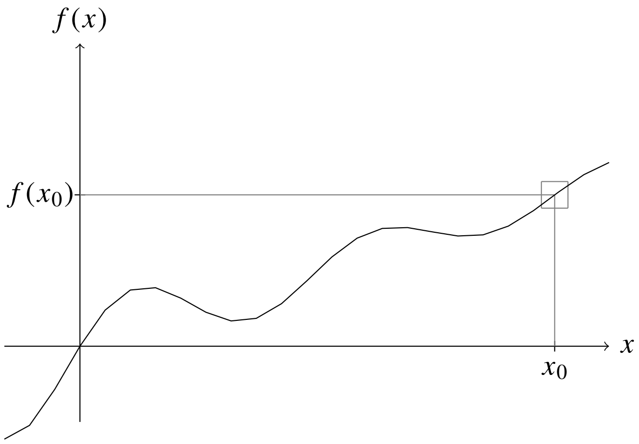
a) Aquivalente Definition der Stetigkeit:
$\epsilon - \delta$- Kriterium, siehe z.B. WHK 6.17
($f$ stetig in $x_0$ falls:
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$)

b) $f : D \to \mathbb{R}$. Gibt es eine Konstante $K > 0$ mit
$|f(x) - f(x_0)| \le K \cdot |x - x_0|\ \forall x \in D$,
so ist $f$ stetig in $x_0$.

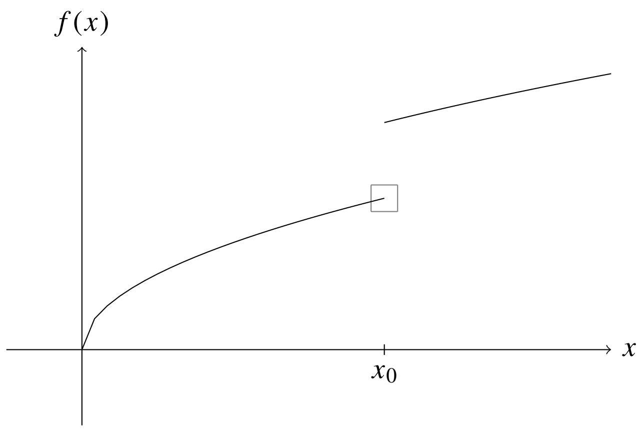
### 3.3 Beispiel

a) $f(x) = x^2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (siehe 2.6.a)) und $= f(x_0)$

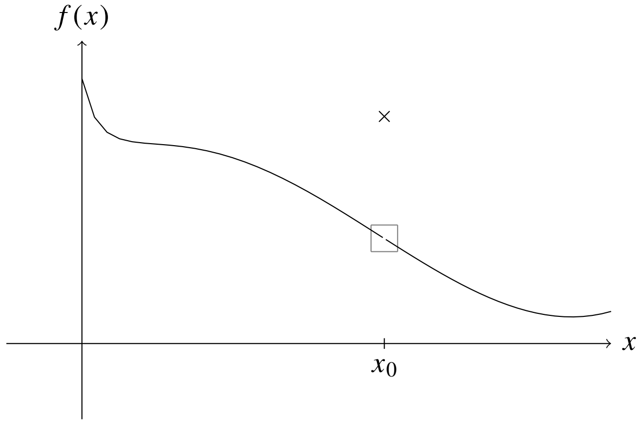
b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $f$ stetig in $x_0$



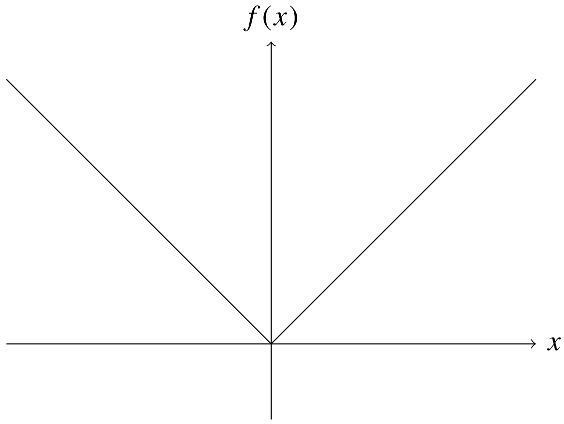

c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, $f$ nicht stetig in $x_0$



d) $f$ nicht stetig in $x_0$




e) $f : f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

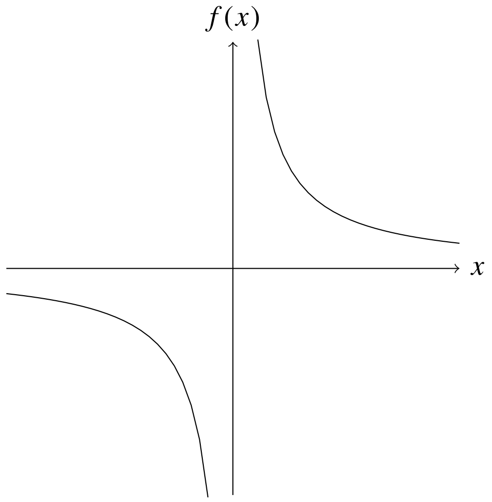



## 3.4 Bemerkung

Schule: "$f$ ist stetig, falls der Graph von $f$ keine Sprungstelle hat / man $f$ 'ohne Absetzen' zeichnen kann." Das ist ok für die Intuition, aber unpräzise.

**Beispiel**

a) $f, f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist stetig auf $D$




b) Die Dirichlet-Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$
ist unstetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$

c) Thomaesche Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (q \text{ minimal}) \\ 0, \text{ falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1, x = 0 \end{cases}$
ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, unstetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$

## 3.5 Satz (Rechenregeln für Stetigkeit)

i) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0, c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch $c \cdot f,\ f + g,\ f - g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0\ \forall x \in D$) stetig in $x_0$.

ii) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R},\ g : D' \to \mathbb{R},\ f(D) \subseteq D'$,
$$\underbrace{D \xrightarrow{f} f(D) \subseteq D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{g \circ f}$$
Sind $f$ und $g$ stetig, dann auch $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$.

iii) $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : D \to f(D)$ bijektiv und stetig,
dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig.

**Beweis**

(i) + (ii) folgt aus den Grenzwertregeln für Folgen und 2

(iii) mehr Arbeit (später oder WHK)

## 3.6 Bemerkung

Man kann zeigen (unter anderem mit Satz 3.5):

a) Potenzreihen mit Konvergenzradius $R$ sind stetig für alle $x$ mit $|x| < R$.

b) Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

c) $\sin x, \cos x, \cot x$ ebenso (vgl. PÜ 4, A5)

## 3.7 Bemerkung / Definition (Rationale Funktionen)

$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ sei rationale Funktion mit $D = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\}$
Dann ist $f$ stetig auf $D$.
Lässt sich $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ definieren ("fortsetzen"), sodass man eine stetige Funktion erhält?

**Beispiel**

a) $f : D = \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
ist stetig auf $D$.
Setze $f$ auf $\mathbb{R}$ fort: $\tilde{f}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{f} = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ b & x = 1 \end{cases}$
$\tilde{f}$ ist stetig in $x_0 = 1$ genau dann, wenn $b = 2$ gesetzt wird, denn $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.
($x_0$ ist "*(stetig) hebbare Definitionslücke*" von $f$)

b) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{x-1}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ hebbar durch $0 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$,
$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$
ist stetig auf $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ nicht hebbar, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht.

d) Gilt für die Nullstelle $x_0$ des Nenners einer rationalen Funktion $f(x) \to \infty$ (oder $-\infty$) für $x \to x_0^-$ oder $x \to x_0^+$, so nennt man $x_0$ *Polstelle*.
z.B.: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 0$
$f(x) \to \underset{-\infty}{+\infty}$ für $x \mapsto \underset{0^-}{0^+}, \quad g(x) \to +\infty$ für $x \mapsto \underset{0^-}{0^+}$

e) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ hat bei $x_0 = 0$ eine *Oszillationsstelle*:

- für $(x_n)_n = \left(\frac{1}{n\cdot\pi}\right) \to 0$ ist $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$
- für $(x_n)_n = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right) \to 0$ ist $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1 \neq 0$

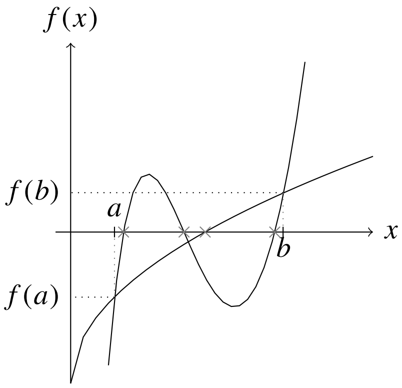
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

f) Es gilt aber: $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to 0$
(0 ist stetig hebbare Definitionslücke, hebbar durch 0)

g) WICHTIG: $f(x) = \frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$
(0 ist stetig hebbare Definitionslücke, hebbar durch 1)

## 3.8 Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano, Nullstellensatz)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $f(a) < 0, f(b) > 0$, dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$
(d.h. $f$ hat eine Nullstelle in $[a,b]$).




**Beweis**

mittels Bisektionsverfahren (→ Mathe I)

- Start:
  $[a,b] =: [a_1, b_1]$
- Schritt 1:
  halbiere das Intervall,
  berechne $y_1 = f(\frac{(a_1+b_1)}{2})$
  - $y_1 < 0$: neues Intervall: $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
  - $y_1 > 0$ : neues Intervall: $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
  - $y_1 = 0$: $c$ schon gefunden: $c = \frac{a_1+b_1}{2}$

  Nach Schritt 1 gilt: $[a_2, b_2]$ (neues Intervall) ist halb so groß wie $[a_1, b_1]$ und $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$
- Schritt 2:
  halbiere das Intervall,
  berechne $y_2 = f(\frac{a_2+b_2}{2})$
  (. . . (siehe Schritt 1))

Für die Folge $([a_n, b_n])_n$ (Folge von Intervallen) gilt:
$(a_n)_n$ monoton steigend, $(b_n)_n$ monoton fallend, $(b_n - a_n) \to 0$

$\Rightarrow$ "Intervallschachtelungsprinzip" $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n := c$

$f(a_n) \leq 0, \quad f(b_n) \geq 0$

Da $f$ stetig ist, gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\leq 0} = f(c), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0} = f(c)$

daraus folgt: $f(c) = 0$ (also hat $f$ eine Nullstelle bei $c$)

Dieses Verfahren wird auch zur Berechnung von Nullstellen verwendet.

### 3.9 Satz (ZWS allgemein)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $y$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann gibt es ein $\bar{x} \in [a,b]$ mit $f(\bar{x}) = y$

Andere Formulierung: $f$ nimmt auf $[a,b]$ jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert an.

**Beweis**

o.B.d.A sei $f(a) \leq y \leq f(b)$
definiere $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - y$
dann ist $g(a) \leq 0, \quad g(b) \geq 0$
$g$ ist stetig

$\overset{3.8}{\Longrightarrow} \exists c \in [a,b]$ mit $g(c) = 0$

$g(c) = f(c) - y = 0$

Dann ist $f(c) = y$
($\to f$ nimmt an der Stelle $c$ den Wert $y$ an)

### 3.10 Anwendungen

a) Existenz von Nullstellen, Bsp. $\pi$ (PÜ5, A6 & 9)

b) Existenz von Lösungen einer Gleichung (PÜ5, A7)

c) $(\ldots)$

d) der ZWS liefert auch ein Kriterium zur Existenz von Umkehrfunktionen, siehe nächster Satz

### 3.11 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *(streng) monoton wachsend* / *(streng) monoton fallend* falls gilt:
sind $x, y \in D, x < y$, dann ist $f(x) \underset{(<)}{\leq} f(y)$, bzw. $f(x) \underset{(>)}{\geq} f(y)$

## 3.12 Satz

$D$ Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv auf D } \Leftrightarrow f \text{ ist streng monoton auf } D$$

**Beweis**

"$\Leftarrow$" (klar)
Sei $x \neq y$, also etwa $x < y$
$f$ streng monoton $\Rightarrow f(x) < f(x)$ , also $f(x) \neq f(y) \Rightarrow$ injektiv

"$\Rightarrow$" wir zeigen: $f$ nicht streng monoton $\Rightarrow f$ nicht injektiv
Sei $f$ nicht streng monoton, dann ist für $x < y < z$ geeignet aus $D$
$f(x) < f(y)$ und $f(y) > f(z)$ oder $f(x) > f(y)$ und $f(y) < f(z)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nach dem ZWS: | $f$ nimmt in | $[x,y]$ | jeden Wert zwischen | $f(x)$ | und | $f(y)$ | an. |
| | " | $[y,z]$ | " | $f(y)$ | und | $f(z)$ | an |

$\Rightarrow$ mindestens ein Wert wird doppelt angenommen $\Rightarrow$ nicht injektiv.

## 3.13 Satz (Minimax-Theorem von Weierstraß)

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (wichtig! abgeschlossenes und beschränktes Intervall)

(i) ist beschränkt,
$$\exists K \in \mathbb{N} : f(x) \in [-K,K] \ \forall x \in [a,b]$$

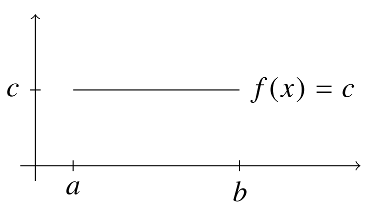
(ii) besitzt sowohl Minimum als auch Maximum, das heißt:
$$\exists x_*, x^* \in [a,b] \text{ mit } f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \ \forall x \in [a,b]$$
($x_*$ heißt Minimumstelle, $x^*$ Maximumstelle)

Beweis benutzt wieder Bisektionsverfahren, siehe WHK 6.24

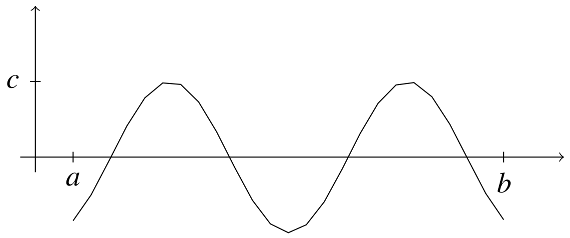
## 3.14 Beispiel und Gegenbeispiel

a)

b) alle $x \in [a,b]$ sind Min-/Max- Stellen!

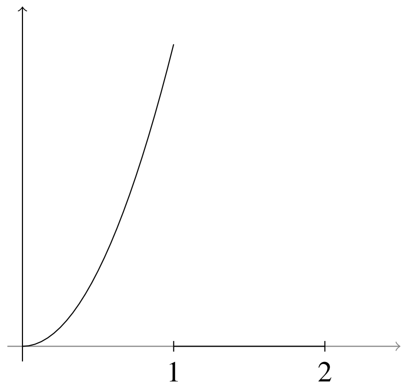


mehrere Min-/Max- Stellen:

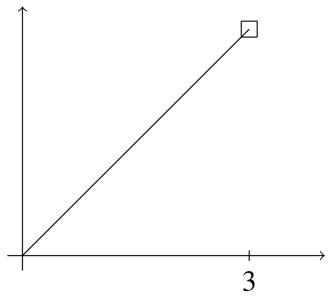



c) Falls nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind, gilt der Satz i.A. nicht. z.B:

- $f$ nicht stetig: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ auf $[0,2]$
  $f$ hat kein Maximum auf $[0,2]$

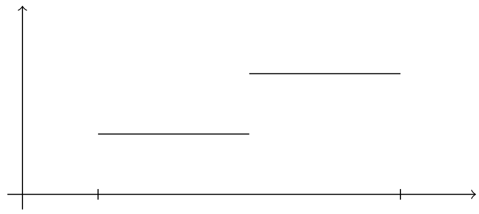



- Definitionsbereich von $f$ nicht abgeschlossen:
  $\begin{aligned} f: \quad [0,3[ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ kein Maximum




- Definitionsbereich von $f$ nicht beschränkt:
  $\begin{aligned} f: \quad ]0,\infty[ &\to ]0,\infty[ \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$ kein Maximum, kein Minimum

- Nicht stetige Funktionen können aber auch ein Maximum/Minimum besitzen



### 3.15 Bemerkung

Satz 3.13 liefert nur die Existenz von Max/Min, aber keine Aussage darüber, wie man Max/Min - Stellen finden kann!

# 4 Differenzierbare Funktionen

## 4.1 Vorbemerkung

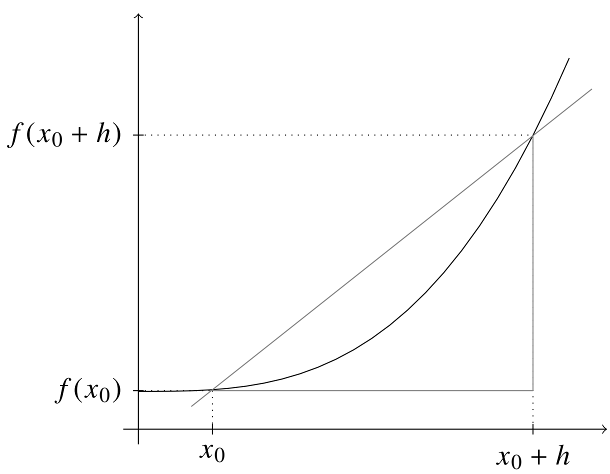
**Idee**

Die Gerade ("Sekante") durch die Punkte $(x_0|f(x_0))$ und $(x_0+h|f(x_0+h))$ hat die Steigung

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \qquad \text{("Differenzenquotient")}$$

Je kleiner $h$, desto besser beschreibt die Sekante die "Steigung von $f$ in $x_0$" Für $h \to 0$ erhält man (falls der Grenzwert existiert) die *Tangente* in $x_0$ mit Steigung

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



### 4.2 Definition

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$

(i) $f$ heißt *differenzierbar* in $x_0$, falls $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die *erste Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$* und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet.

(ii) Ist $f$ in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt $f$ *differenzierbar (auf I)* und man nennt die Funktion
$\begin{aligned} f' : \quad I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$ die *Ableitungsfunktion von $f$*.

### 4.3 Beispiel

a) $f(x) = x^2, x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4+h = \underline{\underline{4}} \\ \text{allg. } f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) = \underline{\underline{2x}} \end{aligned}$$

b) konstante Funktion:

$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ (Übung)

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \cdots = -\frac{1}{x^2} \forall x \neq 0$$

e) $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (\sin x \cdot \underbrace{(\frac{\cos h - 1}{h})}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{(\frac{\sin h}{h})}_{\to 1, \text{Bsp. 3.7.g}} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

f) $f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\sin x$

## 4.4 Satz

$f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist in $x_0$ differenzierbar.

(ii) Es gibt eine Funktion $R : I \to \mathbb{R}$, stetig in $x_0$, $R(x_0) = 0$ und ein $m \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + m(x - x_0)}_{\substack{\text{Gerade durch } (x_0|f(x_0)) \text{ mit Steigung } m \\ = \text{Tangente}}} + \underbrace{R(x)(x - x_0)}_{\text{wird 0 für } x = x_0 \text{ und klein für } x \text{ in der Nähe von } x_0}$$

Gilt (ii), so ist $m = f'(x_0)$

(ii) besagt: $f$ lässt sich in der Nähe von $x_0$ gut durch eine lineare Funktion (Gerade) approximieren.

**Beweis**

(i) $\Rightarrow$ (ii): Setze $R(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0 \quad x = x_0 \end{cases}$

dann ist nach Voraussetzung $\lim\limits_{h\to 0} R(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} - f'(x_0) = 0$ da $f$ differenzierbar in $x_0$.
Also ist $R$ stetig in $R(x_0) = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

$$\begin{aligned} & f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + R(x)(x - x_0) \\ \Rightarrow \quad & f(x_0 + h) = f(x_0) + m(x_0 + h - x_0) + R(x_0 + h)(x_0 + h - x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + R(x_0 + h) \\ \Rightarrow \lim_{h\to 0} & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \underbrace{R(x_0)}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}} = m \end{aligned}$$

d.h. $f$ ist differenzierbar in $x_0$ mit $f'(x_0) = m$

## 4.5 Korollar

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist $f$ auch stetig in $x_0$
(Beweis folgt aus 4.4 ii))

## 4.6 Bemerkung / Beispiel

Umkehrung von 4.5 gilt nicht! Die Betragsfunktion

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}, \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ist bei $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar!

Denn: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existiert nicht:

- $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$
- $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1 \neq 1$

Also: stetig $\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ differenzierbar, $\quad$ ($\neg$ stetig $\Rightarrow \neg$ differenzierbar)

## 4.7 Satz (Ableitungsregeln)

$f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in I$
Dann sind auch $c \cdot f \; (c \in \mathbb{R}),\; f \pm g,\; f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ differenzierbar in $x$ mit

(i) $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

(ii) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(iii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)

(iv) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

**Beweis**

(nur (i) und (iii), Rest ähnlich)

(i) $\frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot (f(x))}{h} = c \cdot \left( \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x) \text{ für } h \to 0} \right)$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)\overbrace{-(f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h))}^{0}}{h} \\
&= \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x+h)}{h}+\frac{f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&\qquad \to f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x) \text{ für } h\to 0
\end{aligned}$$

□

## 4.8 Beispiel

a) jedes Polynom und jede rationale Funktion ist differenzierbar (wegen (i), (ii), (iii), (iv))

b) $(4x^3+7x+5)' = 4\cdot 3x^2+7+0$

c) $\left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$

d) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$

e) $f(x)=x^{-n}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $f'(x)=-n\cdot x^{-n-1}$

f) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

## 4.9 Satz (Kettenregel)

Die Komposition $f\circ g$ zweier differenzierbarer Funktionen $f, g$ ist differenzierbar und es gilt:

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

$$((f\circ g)(x) = f(g(x)), \text{ und } (f(g))'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x))$$

(ohne Beweis, ähnlich wie 4.7)

## 4.10 Beispiel

a) $((3x^2-x)^5)' = 5\cdot(3x^2-x)^4\cdot(6x-1)$

$f(x)=x^5$ (äußere Funktion), $g(x)=3x^2-x$ (innere Funktion)

b) $(\sin(3x))' = \cos(3x)\cdot 3$

$f(x)=\sin x$
$g(x)=3x$

## 4.11 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ bijektiv, differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$
Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^-1 : J \to I$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Merkregel:**

statt Beweis (mit Differentenquotient)
$y = f(f^{-1}(y))$
$\Rightarrow$ nach $y$ ableiten, Kettenregel

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

## 4.12 Beispiel

a) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = ?$
ist Umkehrfunktion $h^{-1}$ von $h(x) = x^2$
$h'(x) = 2x$
$(h^{-1})(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
also $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ist Umkehrfunktion $h^{-1}$ von $h(x) = x^3$
$\ldots \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

c) $f(x) = \ln x$ ist Umkehrfunktion $h^{-1}$ von $h(x) = e^x$
Man kann zeigen: $h'(x) = e^x$
Also $(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

## 4.13 Bemerkung (Logarithmische Ableitung)

$$(\ln(f(x)))' = \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}} \qquad \text{(4.12 c) und Kettenregel)}$$

hilft oft bei der Berechnung von $f'(x)$

**Beispiel**

$f(x) = e^x \cdot (\sin x + 2) \cdot x^5$
$\ln(f(x)) = x + \ln(\sin(x) + 2) + 5 \cdot \ln x$
$(\ln(f(x)))' = 1 + \frac{1}{\sin(x)+2} \cdot \cos(x) + \frac{5}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2} + \frac{5}{x}\right) \cdot \left(e^x \cdot (\sin(x) + 2) \cdot x^5\right)$

## 4.14 Ableitungen der elementaren Funktionen

- $c \in \mathbb{R} : (c)' = 0$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \; n \in \mathbb{N}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (für $x > 0$)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$ ($x \in \mathbb{R}, a > 0$ fest)
- $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$)
- $(x^x)' = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$ ($x > 0$)

## 4.15 Definition

$f : D \to \mathbb{R}$ hat ein *lokales Maximum (Minimum)* [lokales Extremum] an der Stelle $x_0 \in D$, wenn es ein Intervall

$$I = ]x_0 - s, x_0 + s[ \subseteq D, s > 0 \text{ gibt, } \quad \text{mit } f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \; \forall x \in I$$

$I$ heißt Umgebung von $x_0$.

## 4.16 Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \in \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Besitzt $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$

#### Beweis

Sei $x_0$ lokale Max.stelle, d.h. $\exists I$ wie oben mit $f(x_0) \geq f(x) \; \forall x \in I$
Dann ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

- Für $h > 0$ ($h \to 0^+$) gilt (Nenner > 0, Zähler $\leq 0$):
  $f'(x_0) \leq 0$
- Für $h < 0$; ($h \to 0^-$) gilt (Nenner < 0, Zähler $\leq 0$):
  $f'(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

## 4.17 Bemerkung

$f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz lokaler Extrema:

Betrachte zum Beispiel $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 0$, aber $f$ hat in 0 kein Extremum, sondern *Sattelpunkt*.

Also: $f$ hat lokales Extremum in $x_0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$

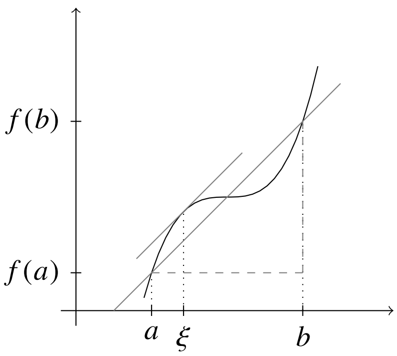
## 4.18 Satz (Mittelwertsätze/Satz von Rolle)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ in $]a, b[$

### 4.18.1 1. Mittelwertsatz

Dann existiert eine Zahl $\xi \in ]a, b[$ mit

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Steigung der Geraden (s.u.)}} = f'(\xi)$$




### 4.18.2 Spezialfall, Satz von Rolle

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\ \xi \in ]a, b[ \text{ mit } f'(\xi) = 0$$

### 4.18.3 2. Mittelwertsatz

Dann $\exists\ \xi \in ]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

**Beweis**

4.18.2: $f$ stetig auf $[a,b] \overset{3.13}{\Rightarrow} f$ hat Max. und Min. auf $[a,b]$

1. Fall: Beide Extrema (Max und Min) werden auf dem Rand angenommen. Wegen $f(a) = f(b) = \text{Max} = \text{Min}$ muss dann $f$ konstant sein, also $f'(x) = 0 \ \forall x \in ]a,b[$ (also auch für ein $\xi \in ]a,b[$)
2. Fall: Ein Extremum wird nicht auf dem Rand, also in einem $\xi \in ]a,b[$ angenommen.
$\overset{4.16}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$

4.18.3: Es gilt $g(a) \neq g(b)$, denn sonst (Rolle 4.18.2) gäbe es ein $\xi \in ]a,b[$ mit $g'(\xi) = 0$
Betrachte Hilfsfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x)$
$h$ ist stetig und differenzierbar auf $]a,b[, \ h(a) = h(b)$
$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \ \xi \in ]a,b[$ mit $h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi)$

4.18.1: folgt aus 3. mit $g(x) = x$

□

## 4.19 Satz (Monotonie-Kriterium)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

(i) $\underset{f'(x)\leq 0}{f'(x) \geq 0} \ \forall x \in ]a,b[ \Leftrightarrow f$ monoton $\underset{\text{fallend}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$

(ii) $\underset{f'(x)<0}{f'(x) > 0} \ \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f$ streng monoton $\underset{\text{fallend}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$

(iii) $f'(x) = 0 \ \forall x \in ]a,b[ \Leftrightarrow f$ ist konstant auf $[a,b]$

**Beweis**

Benutze den 1. Mittelwertsatz (4.18.1)

"$\Rightarrow$" Sei $f'(x) \geq 0$ auf $]a,b[, \ a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$
$\overset{\text{1.MWS}}{\Rightarrow} f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_2)}_{>0} \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
also $f$ monoton wachsend.

"$\Leftarrow$" Sei $f$ monoton wachsend, $x \in ]a,b[$
zu zeigen: $f'(x) \geq 0$: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist immer $\geq 0$:

- für $h > 0$ ($h \to 0^+$) sind Zähler und Nenner positiv $\Rightarrow f'(x) \geq 0$
- für $h < 0$ ($h \to 0^-$) sind Zähler und Nenner negativ $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

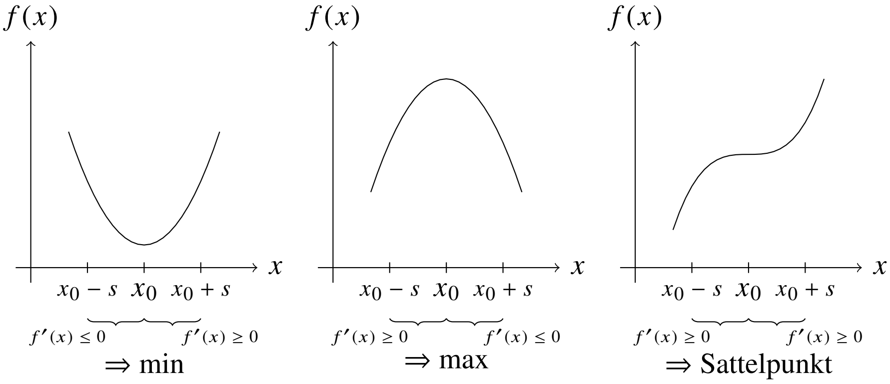
Rest analog.

Strenge Monotonie ist nützlich für die Existenz von Umkehrfunktionen, vgl. 3.12

## 4.20 Satz (hinreichende Kriterien für lokale Extrema - Teil I)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$.
Sei $x_0 \in ]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Ist $f'(x) \underset{\geq}{\leq} 0$ für alle $x \in ]x_0 - s, x_0[$ für ein $s > 0$ und $f'(x) \underset{\leq}{\geq} 0$ für alle $x \in ]x_0, x_0 + s[$ (d.h. $f'(x)$ wechselt in $x_0$ ihr Vorzeichen von $\underset{+}{-}$ nach $\underset{-}{+}$),
so hat $f$ in $x_0$ ein lokales $\underset{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$.
Wechselt $f'(x)$ in $x_0$ ihr Vorzeichen nicht, so hat $f$ in $x_0$ kein lokales Extremum.




**Beweis**

Nach dem 1.MWS (4.18.1) gilt:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) \qquad \text{für } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x$$

- für $x \in ]x_0 - s, x_0[$ ist $x - x_0 < 0$
  $f'(\xi)$ nach Voraussetzung $\leq 0$, also ist $f(x) - f'(x_0) \geq 0$, d.h. $f(x) \geq f(x_0)$
- für $x \in ]x_0, x_0 + s[$ ist $x - x_0 > 0$
  $f'(\xi)$ nach Voraussetzung $\geq 0$, also ist $f(x) - f(x_0) \geq 0$, d.h. $f(x) \geq f(x_0)$

Also: für alle $x \in ]x_0 - s, x_0 + s[$ gilt $f(x) \geq f(x_0)$

$\Rightarrow$ $f$ hat bei $x_0$ ein lokales Minimum.

(Max analog) □

## 4.21 Bemerkung

Falls $f'(x_0) = 0$ gilt und die Funktion $f'$ lokal um $x_0$ streng monoton wachsend ist, dann sind die Bedingungen von Satz 4.20 (für Min) erfüllt.

Dies ist (nach Satz 4.19 (ii)) z.B. dann der Fall, wenn $f''(x) > 0$ in einer Umgebung von $x_0$ gilt.

$(f')'$ (:= $f''$, zweite Ableitung)

## 4.22 Satz (Teil II)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf $]a,b[$
Sei $f''$ stetig in $x_0 \in ]a,b[$.

Dann gilt: falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \underset{<}{>} 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales $\underset{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$.

**Beweis**

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ in Umgebung $]x_0 - s, x_0 + s[$ von $x_0$

$$\begin{aligned}
&\overset{4.19(ii)}{\Rightarrow} f'(x) \text{ streng monoton wachsend auf } ]x_0 - s, x_0 + s[ \\
&\overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} f'(x) \underset{\geq 0}{\leq 0} \text{ auf } \underset{]x_0, x_0+s[}{x_0 - s, x_0} \text{ (d.h. Vorzeichenwechsel)} \\
&\overset{4.20}{\Rightarrow} \text{ lokales Min. bei } x_0
\end{aligned}$$

## 4.23 Satz (die Regeln von l'Hospital)

$f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, a < b$ und es sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in ]a,b[$

$$\text{Gilt } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{oder } \infty \\ \text{oder } -\infty \end{cases} \quad (f, g \text{ div. bestimmt gegen } \infty)$$

so ist

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{falls dieser Grenzwert existiert}$$

Entsprechendes gilt für Grenzwerte für $x \to b^-$
(und auch für $\lim f(x) = +\infty$ und $\lim g(x) = -\infty$ oder andersherum)

## 4.24 Beispiele

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{1 - \cos x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \ldots$ 3 mal Satz 4.23 $\cdots = -\frac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overbrace{\ln x}^{\to \infty}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to \infty}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

allg. kann man zeigen:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, d.h. $\ln x$ geht langsamer gegen $\infty$ als jede Potenz von $x$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

allg: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, d.h. $\underset{e^{ax}(a>0)}{e^x}$ geht schneller gegen $\infty$ als jede Potenz von $x$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2}{1} = 0$

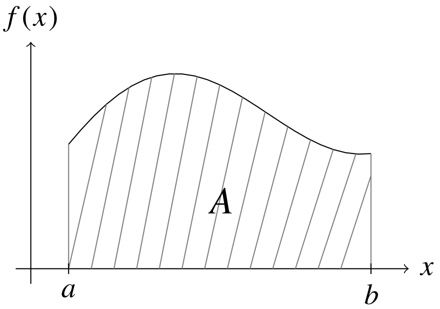
# 5 Integrationsrechnung

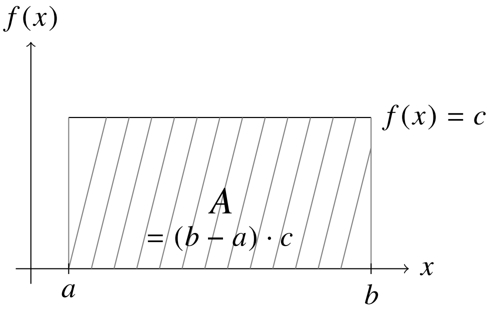
## Berechnung von Flächen, das bestimmte Integral

### 5.1 Motivation / Herleitung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive, beschränkte Funktion
(also $f(x) \geq 0,\ f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$)

Wie groß ist die Fläche, die $f$ begrenzt?



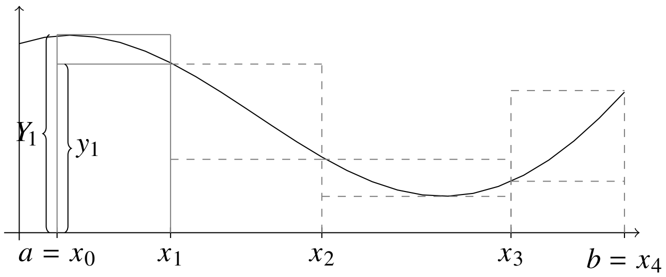




Idee: zerlege die Fläche in kleine Rechtecke. Deren Inhalt lässt sich leicht berechnen.

Genauer: $Z_n$ *Zerlegung* von $[a,b]$ in $n$ Teilintervalle:

wähle zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ beliebige Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,

erhalte so Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i] (i = 1 \ldots n)$




Die Länge des größten dabei entstehenden Teilintervalls heißt *Feinheit* der Zerlegung $Z_n$ ($\mu(Z_n)$)

Sei nun
$y_i := \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ (größte untere Schranke)
$Y_i := \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ (kleinste obere Schranke)

Dann heißt
$U_n := \sum_{i=1}^{n}((x_i - x_{i+1}) \cdot y_i)$ bzw.
$O_n := \sum_{i=1}^{n}((x_i - x_{i+1}) \cdot Y_i)$
die $n$-te Unter- bzw. Obersumme von $f$ über $[a,b]$ bezüglich $Z_n$

Wird die Zerlegung sehr fein gewählt, so geben $U_n$ und $O_n$ (hoffentlich) eine gute Näherung für $A$.

### 5.2 Definition (Riemann - Integral)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Konvergieren $U_n$ und $O_n$ für jede Folge von Zerlegungen $(Z_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(Z_n) = 0$ für $n \to \infty$ gegen denselben Wert $A$, so heißt $f$ *(Riemann-) integrierbar* über $[a,b]$.

Man nennt diesen Grenzwert $A$ auch *Integral von $f$ über* $[a,b]$ und bezeichnet ihn mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir legen fest:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

### 5.3 Beispiel

a) $f(x) = c \quad \forall x,$
dann $y_i = c = Y_i \quad \forall x = 1 \dots n$
$U_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a)$
$0_n = \dots$
egal wie die $x_i$ gewählt werden, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = c \cdot (b-a)$

b) Es gibt auch Funktionen, die nicht (Riemann-) integrierbar sind.
$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

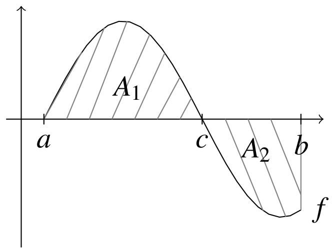
### 5.4 Bemerkung

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert beispielsweise, wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

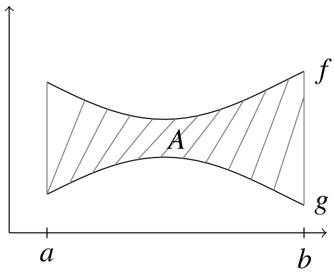
- stetig ist oder
- monoton ist oder
- beschränkt und "fast überall" stetig ist.

## 5.5 Bemerkung

Wir hatten in 5.1 $f$ positiv gewählt. In diesem Fall ist $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ der Inhalt der von $f$ begrenzten Fläche. Andere Fälle:




$A = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b -f(x)\ \mathrm{d}x$




$A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

## 5.6 Rechenregeln

Seien $f, g$ auf $[a,b]$ integrierbar. Dann ist

(i) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

(iii) $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \ \ \forall c \in [a,b]$

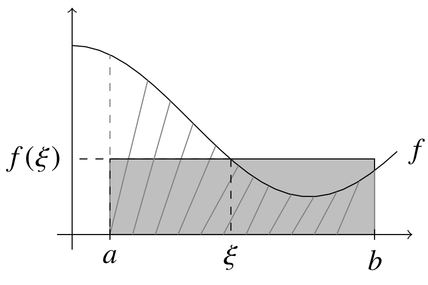
(iv) $f(x) \leq g(x)\ \forall x$, dann auch $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ (Monotonie)

(v) falls $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$, dann ist $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M \cdot (b-a)$

## 5.7 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit




$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b-a)$$

**Beweis**

$f$ ist stetig auf $[a,b] \underset{\text{Minimax-Theorem}}{\overset{3.13}{\Longrightarrow}} f$ nimmt auf $[a,b]$ Minimum $m$ und Maximum $M$ an $(m \leq f(x) \leq M)$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

$$\overset{\text{ZWS } 3.8}{\Rightarrow} \exists \xi \in [a,b] \text{ mit } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

## Stammfunktionen und der HDI

Wir können Flächeninhalte bisher nur über Riemann-Summen $(U_n, O_n, Z_n)$ berechnen. Das ist umständlich. Bessere Methode?

### 5.8 Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann nennt man jede differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$ gilt, eine *Stammfunktion* von $f$ über $[a,b]$

### 5.9 Beispiel

a) $f(x) = 3$, $F(x) = 3x$ oder $F(x) = 3x + 1$ oder …

b) $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$

c) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + c$

### 5.10 Bemerkung

Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt! Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann auch $F + c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$
(denn: $F' = f$ und $(F+c)' = F' + 0 = f$)

Sind $F$ und $G$ Stammfunktion von $f$, so können sie sich nur durch eine Konstante unterscheiden:

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \overset{4.19(iii)}{\Rightarrow} F - G \text{ ist konstant.}$$

Der Zusammenhang zwischen dem in 5.1/5.2 behandelten Integral von $f$ und einer Stammfunktion von $f$ wird im folgenden Satz hergestellt.

## 5.11 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

(i) Dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$$

eine Stammfunktion von $f$

(ii)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

**Beweis**

(i) Betrachte den Differenzenquotient:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt \right)$$
$$\overset{5.6}{=} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Nach dem MWS. der Integralrechnung (5.7) existiert ein $\xi \in [x, x+h]$ mit $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi)$
Für $h \to 0$ erhalten wir ($\xi$ ist $\in [x, x+h]$, also $\xi \to x$ für $h \to 0$)

$$F'(x) = f(x)$$

also ist $F$ Stammfunktion von $f$

(ii) folgt aus (i) □

## 5.12 Beispiel

Satz 5.11 hilft bei der Berechnung von Integralen:

a) $\int_0^3 2\,\mathrm{d}x = [2x]_0^3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 6$

b) $\int_1^2 (x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x]_1^2 = \cdots = \frac{29}{6}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

### 5.13 Bemerkung

1) Der HDI besagt: Die Integration ist die inverse Operation zur Differenziation.
2) Schreibweise: Um klarzumachen, dass $F$ Stammfunktion von $f$ ist ($F'(x) = f(x)$), schreibt man oft auch $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
("unbestimmtes Integral")
3) Es ist egal, welche Stammfunktion man im HDI (ii) zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ benutzt:
$$(F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

## Techniken zur Bestimmung von Stammfunktionen

### 5.14 Stammfunktionen elementarer Funktionen

(Beweis durch Differenzieren)

- $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| \quad (x \neq 0)$
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x$

### 5.15 Partielle Integration

Es gilt:
$$\underbrace{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x}_{②} = \underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{①} - \underbrace{\int f(x)g'(x)}_{③}\,\mathrm{d}x$$

Diese Methode ist abgeleitet von der Produktregel der Differenzialrechnung:
$$\underbrace{(f(x)\cdot g(x))'}_{①} = \underbrace{f'(x)\cdot g(x)}_{②} + \underbrace{f(x)\cdot g'(x)}_{③}$$

#### Bemerkung

Polynome von kleinem Grad sind oft eine gute Wahl für $g$, siehe Beispiel.

**Beispiel**

a) $\int \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \, \mathrm{d}x = (-\cos x) \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = (-\cos x) \cdot x + \int \cos x \, \mathrm{d}x$
$= \underline{\underline{(-\cos x) \cdot x + \sin x}}$

b) $\int \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, \mathrm{d}x = e^x \cdot x^2 - \int \underbrace{e^x}_{f_2'(x)} \cdot \underbrace{2x}_{g_2(x)} \, \mathrm{d}x$
$= e^x \cdot x^2 - (e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2 \, \mathrm{d}x) = e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x + 2 \cdot e^x$
$= \underline{\underline{e^x(x^2 - 2x + 2)}}$

c) $\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{x \cdot \ln x - x}}$

d) ”Phoenix aus der Asche”

Integral, das eine Funktion enthält, die bei P.I. in absehbarer Zeit wieder erscheint.

$$\underline{\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g(x)} \, \mathrm{d}x} = e^x \cdot \cos x + \int \underbrace{e^x}_{f_2'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g_2(x)} \, \mathrm{d}x = e^x \cdot \cos x + \left( e^x \sin x - \underline{\int e^x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int e^x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}}}$$

## 5.16 Substitution

Es gilt

$$\underbrace{\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x}_{②} = \underbrace{f(g(x))}_{①}$$

Diese Methode ist aus der Kettenregel der Differenzialrechnung abgeleitet

$$\underbrace{(f(g(x)))'}_{①} = \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{②}$$

Man hat mit ihr gute Aussichten auf Erfolg, wenn im Integrand neben einer Funktion auch deren Ableitung vorkommt.

**Beispiel**

a) $\int e^{x^2} \cdot 2x \, \mathrm{d}x = \underbrace{e^{x^2}}_{f(g(x))}$
äußere Funktion: $f(u) = e^u$
innere Funktion: $g(x) = x^2, g'(x) = 2x$

Falls nicht alles so gut passt wie hier: hinbiegen.

Sonst oft einfacher: formales Rezept:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = g(x)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Leftrightarrow g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$\int f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u) \quad \text{[Rücksubstitution: } u = g(x)] \quad = f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

b) $\int x \cdot \sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

$\left[u = 2x^2 + 1 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x \Leftrightarrow \mathrm{d}u = 4x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{4} = x \cdot \mathrm{d}x\right]$

$= \int \sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} \overset{\text{Rücksubstitution}}{=} \frac{1}{6} \cdot (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

c) $\int g'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$

$[u = g(x) \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x]$

$= \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 \overset{\text{Rücksubstitution}}{=} \frac{1}{2}(g(x))^2$

## 5.17 Bemerkung

bestimmtes Integral berechnen:

$$\text{z.B.} \int_0^1 x \cdot \sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

bestimme zuerst Stammfunktion: $\int x \cdot \sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{\text{b)}}{=} \frac{1}{6} \cdot (2x^2+1)^{\frac{3}{2}} = F(x)$

benutze den HDI:

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{6} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}$$

# Teil II

# Lineare Algebra

## 6 Vektorräume

### 6.1 Definition (Reeller Vektorraum)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ ist eine nichtleere Menge, deren Elemente *Vektoren* genannt werden, auf der eine Addition + definiert ist,

$$+ : V \times V \to V$$

und eine Multiplikation $\bullet$ mit reellen Zahlen ("Skalare")

$$\bullet : \mathbb{R} \times V \to V$$

so dass gilt:

(1.1) $(u + v) + w = u + (v + w) \;\; \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ("Nullvektor")
mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \;\; \forall v \in V$

(1.3) zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$
mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \;\; \forall u, v \in V$

($\to$ $(V, +)$ ist kommutative Gruppe)

(2.1) $(\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Add. in } \mathbb{R}}}{+} \mu) \cdot v = \lambda \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Add. in } V}}{+} \mu \cdot v \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $(\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mul. in } \mathbb{R}}}{\cdot} \mu) \cdot v = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mul. in } V}}{\cdot} (\mu \cdot v) \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v$

### 6.2 Beispiel

a) Trivialer Vektorraum: Nullraum
$V = \{\mathcal{O}\}$ mit $\mathcal{O} + \mathcal{O} = \mathcal{O}$, $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller "Spaltenvektoren" der Länge $n$ über $R$.

Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

Vektoren: reelle Zahlen
Skalare: reelle Zahlen

d) Funktionenraum:

$M \neq \emptyset$ Menge, $V = \mathcal{F}(M,R) = \{f : M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf $M$ definierten reellen Funktionen.

Für $f, g \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} f + g &: M \to \mathbb{R}, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M \\ \lambda \cdot f &: M \to \mathbb{R}, \ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \forall x \in M \end{aligned}$$

Dann ist $V$ mit $\mathbb{R}, +, \bullet$ ein reller Vektorraum.

Nullvektor ist $f = \mathcal{O} : M \to \mathbb{R}, f(x) = 0 \ \ \forall x \in M$
(kurz: $f \equiv 0$, $f$ identisch Null)

## 6.3 Lemma

$V$ reeller Vektorraum, $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

(ii) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

(iii) zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus 6.1 eindeutig bestimmt.

(iv) $(-1) \cdot v = -v$

**Beweis**

(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + (-0 \cdot v) = (0+0) \cdot v + (-0 \cdot v) \\ &\overset{(2.2)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\ &\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v)) \\ &\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\ &\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v \end{aligned}$$

(ii) wie (i), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O}) = \cdots = \lambda \cdot \mathcal{O}$

(iv)

$$\begin{aligned} v + (-1)\cdot v &= 1 \cdot v + (-1)\cdot v \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v \\ &\overset{(i)}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow v + (-1)\cdot v + (-v) = v + (-v) + (-v)$
$\Leftrightarrow (-1)\cdot v = -v$

(iii) Angenommen zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v' \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$ (...) Rest Übung (PÜ)

## 6.4 Definition

Sei $V$ ein reeller Vektorraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ heißt *Untervektorraum* von $V$, falls $U$ bezüglich der Addition auf $V$ und der Multiplikation mt Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

## 6.5 Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist Unter(vektor)raum von $\mathbb{R}^2$

## 6.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei $V$ ein reeller Vektorraum, $\emptyset \neq U \subseteq V$. Dann ist $U$ ein Unterraum von $V$ genau dann, wenn gilt:

(1) $v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \ \Rightarrow v + w \in U$

$[\forall v, w \in U,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v + \mu w \in U]$

Man sagt: $U$ ist abgeschlossen bezüglich Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren.

### Beweis

$'' \Rightarrow ''$ ist klar, da $U$ laut 6.4 selbst Vektorraum ist.

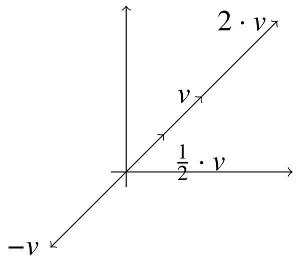
$'' \Leftarrow ''$ beweist man durch Nachrechnen aller Vektorraumaxiome aus 6.1

## 6.7 Beispiel

a) Sei $V$ ein reeller Vektorraum, $O \neq v \in V$

Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum von $V$.

(Falls $V = \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$: $G$ ist Gerade durch den Nullpunkt)




aber: für $w \neq \mu \cdot v$ ($\mu \in \mathbb{R}$) ist $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ <u>kein</u> Unterraum

b) $V = \mathbb{R}^3$

$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ist Unterraum:

- $U_1 \neq \emptyset$, z.B. ist $O \in U_1 : O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 + 0 - 0 = 0$ ✓

(1) $\lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

(gilt das auch für $\lambda \cdot v$?)

$\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 = \lambda \cdot (\underbrace{x_1 + x_2 - x_3}_{=0}) = 0$ ✓

(2) $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $\begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{matrix}$

(gilt $v + w \in U_1$?)

$v + w = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = \underbrace{x_1 + x_2 - x_3}_{0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{0} = 0$ ✓

$$U_1 \overset{\substack{x_1+x_2-x_3=0 \\ \Rightarrow x_3=x_1+x_2}}{=} \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

d.h.: $U_1$ ist die Ebene durch $O$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}$ ist <u>kein</u> Unterraum! (Übung)

d) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$ ist <u>kein</u> Unterraum!

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3$, aber $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$

geometrische Interpretation: $U_3$ ist Kugel um $O$ mit Radius 1.

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Menge $C(I)$ der stetigen Funktionen auf $I$ ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Menge der differenzierbaren Funktionen auf $I$ ist Unterraum von $C(I)$

## 6.8 Satz

$V$ ein reeller Vektorraum, $U_1, U_2$ Unterräume von $V$

(i) $U_1 \cap U_2 := \{u \in V \mid u \in U_1 \text{ und } u \in U_2\}$ (*Durchschnitt* von $U_1, U_2$) ist Unterraum von $V$.

(ii) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ (*Summe* von $U_1$, $U_2$) ist Unterraum von $V$.

**Beweis**

(i) selbst überlegen, Übung! (PÜ)

(ii)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $O = \underset{\in U_1}{O} + \underset{\in U_2}{O} \in U_1 + U_2$
- Seien $v = \underset{\in U_1}{u_1} + \underset{\in U_2}{u_2}, w = \underset{\in U_1}{u_1'} + \underset{\in U_2}{u_2'} \in U_1 + U_2$

  und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  zu zeigen: $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U_1 + U_2$

  $$\lambda \cdot v + \mu \cdot w = \lambda \cdot (u_1 + u_2) + \mu \cdot (u_1' + u_2') = \underbrace{(\underbrace{\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_1'}_{\in U_1}) + (\underbrace{\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot u_2'}_{\in U_2})}_{\in U_1 + U_2}$$

## 6.9 Bemerkung

(i) lässt sich auch auf beliebig viele Unterräume ausweiten

(ii) auch für endlich viele

(iii) Ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum?

## 6.10 Beispiel

a) Siehe 6.7a)

$G_1 = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
$G_2 = \{\lambda \cdot w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

dann ist $E = G_1 + G_2$ Unterraum (Ebene (für $v \neq w$))

b) $V = \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Ebenen durch Nullpunkt, Unterraum.

$E_1 \cap E_2 = ?$

Für Vektoren aus $E_1 \cap E_2$ muss gelten

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \beta = \mu, \quad \alpha = -\beta$$

$$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \left\{ \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \underline{\text{(Gerade)}}$$

$E_1 + E_2 = ?$

$$\underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in E_1} + \underbrace{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in E_2} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu \end{pmatrix}$$

d.h.: $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$

## 6.11 Definition

$V$ reeller Vektorraum

(i) $v_1, \dots, v_m \in V,\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

Dann nennt man die Summe

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \quad \textit{Linearkombination} \text{ von } v_1, \dots, v_m$$

(Bemerkung: zwei formal verschiedene Linearkombinationen können denselben Vektor ergeben)

(ii) Ist $M \subseteq V$, so ist der von $M$ *erzeugte* oder *aufgespannte* Unterraum $< M >_{\mathbb{R}}$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen, die man mit Vektoren aus $M$ bilden kann, also

$$< M >_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R},\, v_i \in M,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$< \emptyset >_{\mathbb{R}} = \{O\}$

Für $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ schreibe auch $< M >_{\mathbb{R}} = < v_1, \ldots, v_m >_{\mathbb{R}}$

(iii) Ist $V = < M >_{\mathbb{R}}$, so heißt $M$ ein *Erzeugendensystem* von $V$.

Gibt es ein endliches Erzeugendensystem von $V$, so heißt $V$ *endlich erzeugt/erzeugbar*

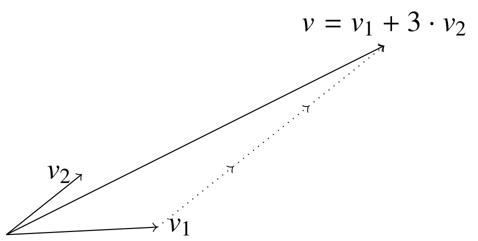
## 6.12 Bemerkung

$M \subseteq V$, dann ist $< M >_{\mathbb{R}}$ tatsächlich ein Unterraum von $V$, und zwar der kleinste, der $M$ enthält.

**Beweis**

- $< M >_{\mathbb{R}}$ ist UR: klar wegen 6.6 (Unterraumkriterium)
- $M \subseteq < M >_{\mathbb{R}}$
- Ist $U$ Unterraum von $V$ mit $M \subseteq U$, dann enthält $U$ alle endlichen Linearkombinationen von Elementen von $M$ (6.6 UR-Krit.), d.h. $< M >_{\mathbb{R}} \subseteq U$, d.h. $U$ kann nicht kleiner sein als $< M >_{\mathbb{R}}$. $\square$

## 6.13 Beispiel

a) 


$v = v_1 + 3 \cdot v_2$ Linearkombination von $v_1, v_2$

b) $v \in V, < v >_{\mathbb{R}} = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(alle Vielfachen von $v$, z.B. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, Gerade)

c) $V = \mathbb{R}^n$

jedes $v \in V$ ist LK von $e_1, \ldots, e_n$ (kanonische Einheitsvektoren) wobei $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 (\leftarrow i) \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$

z.B.: $\mathbb{R}^2 : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + (-5) \cdot e_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $V =< e_1, \ldots, e_n >_{\mathbb{R}}$

d) $U :=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^2$

falls ja, dann muss es für beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ geeignete Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geben, sodass $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

also $\begin{array}{ll} 1) & x = 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta \\ 2) & y = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \beta & = & x - y \\ \alpha & = & 2y - x \end{array}$

also ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \underset{(2 \cdot 5 + 7)}{17} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{(-7-5)}{-12} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$W := \underbrace{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{erzeugen schon den ganzen } \mathbb{R}^2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

e) $U :=< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist $U =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$ $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ wird nicht gebraucht} \right)$

$\left( \text{Bem.: } 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

## 6.14 Definition

$V$ reeller Vektorraum. $v_1, \ldots, v_m \in V$ heißen *linear abhängig*, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt, nicht alle gleich 0, sodass

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = O$$

Gibt es solche Skalare nicht, so heißen $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*

(auch: $\{v_1, \ldots, v_m\}$ l.a/l.u, $\emptyset$ per Definition l.u.)

### 6.15 Beispiel

a) $\mathcal{O}$ ist linear abhängig (wähle beliebiges $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, dann $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$ )

b) $v \neq \mathcal{O} \in V$, dann ist $v$ linear unabhängig.

[ angenommen, es gibt $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot v = \mathcal{O}$.

Dann ist $v \overset{\substack{6.1\\(2.4)}}{=} 1 \cdot v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v \overset{\substack{6.1\\(2.3)}}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{O} \overset{6.3(iv)}{=} \mathcal{O}$ ↯ ]

c) $v, w \in V$, beide $\neq \mathcal{O}$

Dann: $v, w$ l.a. $\Leftrightarrow v \in < w >_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow w \in < v >_{\mathbb{R}}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 1 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma & = & 0 \\ 2 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta - 5 \cdot \gamma & = & 0 \end{array}$$

"Triviallösung" ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (gibt es immer)

Es gibt hier aber auch "nicht triviale Lösungen", setze zum Beispiel $\gamma = 1$, erhalte dann $\alpha = 2, \beta = 1$

$\Big($oder gleich zu Beginn "scharfes Hinsehen": $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\Big)$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^3$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$, allg. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l.u. in $\mathbb{R}^n$

g) In $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind die Vektoren $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) = x \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g(x) = x^2 \end{array}$ linear unabhängig, denn:

angenommen, es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = \mathcal{O}$ ($\leftarrow$ Nullfunktion)

$\Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, also auch für $\left.\begin{array}{lrcl} x = 1 : & \alpha + \beta & = & 0 \\ x = -1 : & -\alpha + \beta & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

h) In $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind $\begin{array}{rcl} f(x) & = & \cos^2 x \\ g(x) & = & \sin^2 x \\ h(x) & = & 3 \end{array}$ linear abhängig

$1 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) - \frac{1}{3} \cdot h(x) = O$

$\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$

## 6.16 Bemerkung

$M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

a) $O \in M \Rightarrow M$ l.a. $\quad (1 \cdot O + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = O)$

b) $M$ l.a, $\quad M \subseteq N \subseteq V, \quad V$ endlich $\quad \Rightarrow N$ l.a.

c) $M$ l.u, $\quad L \subseteq M \quad \Rightarrow L$ l.u.

## 6.17 Lemma

$M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

a) Ist $v_i \in < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$, so $< M >_{\mathbb{R}} = < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$
("Wenn $v_i$ durch andere Vektoren erzeugt werden kann, dann braucht man $v_i$ zum Erzeugen von $< M >_{\mathbb{R}}$ nicht")

b) Ist $M$ l.a, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = O$, $\lambda_i \neq 0$, so $< M >_{\mathbb{R}} = < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$
("Falls ein Vektor bei LK von $O$ Skalar $\neq 0$ hat, braucht man diesen zum Erzeugen nicht")

**Beweis**

a) $v_i \in < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$, d.h. man kann $v_i$ schreiben als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$
Also ist jede LK von $v_1, , \ldots, v_n$ auch als LK von $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ schreibbar.

b) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = O \Rightarrow \lambda_i \cdot v_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot v_j$

$\overset{\lambda_i \neq 0}{\Rightarrow} \quad v_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot v_j$

Also ist $v_i$ als LK von $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ darstellbar. Rest folgt mit a). □

## 6.18 Satz

$M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

(i) $M$ l.a. $\Leftrightarrow$ es gibt mindestens ein $v_i \in M$ mit $v_i \in < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$,
d.h. $< M >_{\mathbb{R}} = < M \backslash \{v_i\} >_{\mathbb{R}}$

(ii) $M$ l.u. $\Leftrightarrow$ zu jedem $v \in < M >_R$ gibt es <u>eindeutig bestimmte</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda n \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$

(iii) $M$ l.u, $v \notin < M >_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ l.u.

**Beweis**

(i) "$\Rightarrow$" 6.17

"$\Leftarrow$" falls $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot v_j \quad$ ($v_i$ LK der restlichen)

dann $\underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot v_j = \mathcal{O}$ also $M$ l.a.

(ii) "$\Rightarrow$" Sei $M$ l.u., $v \in <M>_{\mathbb{R}}$

Angenommen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i$,

dann ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot v_i = \mathcal{O}$

Da $M$ l.u. ist, sind alle $(\lambda_i - \mu_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ \forall i$

"$\Leftarrow$" angenommen $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = \mathcal{O} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$

$\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ also $M$ l.u.

(iii) betrachte $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O}$

(z.zg: $\lambda_i = 0$ und $\lambda = 0$)

falls $\lambda \neq 0$ ist $v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot v_i$, also $v \in <M>_{\mathbb{R}}$ ↯, also $\lambda = 0$

Dann aber auch $\lambda_i = 0$, da $M$ l.u. □

## 6.19 Definition

$V$ ein endlich erzeugter reeller Vektorraum.

Eine endliche Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis von* $V$, falls

a) $V = <B>_{\mathbb{R}}$

b) $B$ l.u.

($V = \{\mathcal{O}\}$: $\emptyset$ ist Basis von $V$)

## 6.20 Beispiel

a) $e_1, \ldots, e_n$ Basis von $\mathbb{R}^n$ (*kanonische Basis*)

b) Basis von $\mathbb{R}^2$: z.B. $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ aber auch z.B. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$,

denn: $\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-\frac{1}{4} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

also sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} = R^2$

Außerdem sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ l.u.

## 6.21 Satz (Existenz von Basen)

$V$ endlich erzeugter Vektorraum

Dann enthält jedes endliche Erzeugendensystem von $V$ eine Basis.

**Beweis**

Sei $< M >_{\mathbb{R}} = V, \; M$ endlich

Ist $M$ l.u, dann fertig ($M$ Basis)

Ist $M$ l.a, so existiert nach 6.18 (i) ein $v \in M$ mit $< M\backslash\{v\} >_{\mathbb{R}} = < M >_{\mathbb{R}} \; (= V)$

Nach endlich vielen Verfahren liefert dieses Verfahren eine Basis. □

## 6.22 Lemma

$V$ endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum. $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von $V$.

Sei $\mathcal{O} \neq w \in V$, $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$

Ist $\lambda_j \neq 0$, so ist $(B\backslash\{v_j\}) \cup \{w\}$ eine Basis von $V$.

(d.h. man kann $v_j$ gegen $w$ tauschen, wenn $\lambda_i \neq 0$ in LK für $w$)

(Bsp.: $V = \mathbb{R}^3, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 7 \cdot e_3$

$4 \neq 0 \Rightarrow \{w, e_2, e_3\}$ ist Basis von $V$

$7 \neq 0 \Rightarrow \{e_1, e_2, w\}$ ist Basis von $V$)

**Beweis**

1) zeige: ⊛ erzeugt ganz $V$

   $\lambda_j \cdot v_j = w - \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot v_i \Rightarrow v_j = \frac{w}{\lambda_j} - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot v_i$

   Also $v_j \in < (B\backslash\{v_j\}) \cup \{w\} >_{\mathbb{R}}$

   (6.17): $\quad V = < B \cup \{w\} >_{\mathbb{R}} = < B\backslash\{v_j\} \cup \{w\} >_{\mathbb{R}}$

2) zeige: ⊛ ist linear unabhängig.

   Sei $\sum_{i \neq j} \mu_i \cdot v_i + \mu \cdot w = \mathcal{O} \quad$ (z.zg: $\mu_i, \mu = 0$)

   $\Rightarrow \sum_{i \neq j} \mu_i \cdot v_i + \mu \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \right) = \mathcal{O}$

   $\Rightarrow \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \cdot \lambda_i) \cdot v_i + \mu \cdot \lambda_j \cdot v_j = \mathcal{O}$

   falls $\mu \cdot \lambda_j \neq 0$, dann ist $v_j$ LK der anderen $v_i$, dann aber $v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig (ϟzu Basis)

$\Rightarrow \mu \cdot \lambda_j = 0$. Dann aber auch $(\mu_i + \mu \cdot \lambda_i) = 0$ für alle $i \neq j$
(da $v_1, \ldots, v_n$ Basis und damit l.u.)

$\Rightarrow \underset{(\lambda_j \neq 0)}{\mu = 0} \Rightarrow \mu_i = 0 \; \forall i \neq j$

also $B \backslash \{v_j\} \cup \{w\}$ l.u. □

## 6.23 Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)

$v_1, \ldots, v_n$ Basis von $V$.

Seien $w_1, \ldots, w_m \in V$ linear unabhängig.

Dann kann man aus den $n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ $n - m$ Stück auswählen, die zusammen mit $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von $V$ bilden (insbesondere ist $m \leq n$).

**Beweis**

Wende Lemma 6.22 sukzessive an:

① $w_1 \in V$, d.h. $w_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j$

Wären alle $\lambda_j = 0$, so wäre $w_1 = \mathcal{O}$, dann aber (Bem. 6.16 a)) $w_1, \ldots, w_m$ nicht linear unabhängig.

Also: mind. ein $\lambda_j \neq 0$, oBdA (sonst umbenennen) $\lambda_1 \neq 0$

$\overset{6.22}{\Rightarrow}$ man kann $v_1$ austauschen,

$w_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ist Basis von $V$.

② $w_2 \in V$, d.h. $w_2 = \mu_1 \cdot w_1 + \sum_{j=2}^{n} \mu_j \cdot v_j$

Wären $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$, so wäre $w_2 = \mu_1 \cdot w_1$, also $w_1, w_2, \ldots, w_m$ l.a.

Also: mindestens ein $\mu_j$ $(j = 2 \ldots n) \neq 0$, oBdA $\mu_2 \neq 0$

$\overset{6.22}{\Rightarrow}$ man kann $v_2$ austauschen,

$w_1, w_2, v_3 \ldots, v_n$ Basis von $V$

…usw. □

## 6.24 Korollar

$V$ endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR.

(i) Je zwei Basen von $V$ enthalten gleich viele Elemente.

(ii) (Basisergänzungssatz)

Jede l.u. Teilmenge von $V$ lässt sich zu Basis ergänzen.

**Beweis**

(i) Seien $B, \tilde{B}$ Basen von $V$

Nach 6.23 ist $|B| \leq \left|\tilde{B}\right|$ (falls $B$ Rolle von $w_1, \ldots, w_m$ übernimmt)
und $\left|\tilde{B}\right| \leq |B|$ ( " $\tilde{B}$ " )

$\Rightarrow |B| = \left|\tilde{B}\right|$

(ii) Wähle beliebige Basis von $V$ und tausche mittels Satz 6.23 aus. □

## 6.25 Satz

$V$ endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR, $B \subseteq V$
Dann sind äquivalent:

(i) $B$ ist Basis von $V$

(ii) $B$ ist max. l.u. Menge von $V$

(iii) $B$ ist minimales Erzeugendensystem von $V$

**Beweis**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) | $\Rightarrow$ | (ii) | (6.24) |
| (ii) | $\Rightarrow$ | (i) | (6.18 c) |
| (i) | $\Rightarrow$ | (iii) | (6.18 a) |
| (iii) | $\Rightarrow$ | (i) | (6.17 b) |

## 6.26 Definition

$V$ $\mathbb{R}$-VR

(i) Ist $V$ endlich erzeugt, $B$ Basis von $V$, $|B| = n$
So hat $V$ *Dimension* $n$, $\dim(V) = n$
($V$ heißt *endlich dimensional*)

(ii) Ist $V$ nicht endlich erzeugbar, so heißt $V$ *unendlich dimensional*

## 6.27 Korollar

$\dim(V) = n,\ B \subseteq V$ mit $|B| = n$
Dann gilt:

(i) $B$ l.u. $\Rightarrow B$ ist Basis von $V$.

(ii) $< B >_{\mathbb{R}} = V \Rightarrow B$ ist Basis von $V$.

(d.h: man braucht nicht beide Eigenschaften (1) & (2) aus Definition 6.19 prüfen)
Beweis folgt aus 6.25

## 6.28 Beispiel

- $e_1, \dots, e_n$ (kanonische) Basis von $\mathbb{R}^n$, $\quad \dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $V = \{\mathcal{O}\}$ Nullraum, hat Dimension 0, denn $\emptyset$ ist Basis, enthält 0 Elemente.
- Bilden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

  Wegen 6.27 reicht es zu zeigen, dass sie l.u. sind.
- $V = \mathbb{R}^4$, $U = < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} >_{\mathbb{R}}$

  $u_1, u_2$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $U$, also $\dim(U) = 2$

  Wie kann man $u_1, u_2$ zu einer Basis von $V$ ergänzen?

  1. Möglichkeit : Austauschsatz (6.22, 6.23)

     $e_1, e_2, e_3, e_4$ Basis von $V = \mathbb{R}^4$

     $u_1 = \underline{1} \cdot e_1 + \underline{2} \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \underline{1} \cdot e_4$

     $\Rightarrow u_1, e_2, e_3, e_4$ Basis von $V$ (6.22)

     $u_2 = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot e_2 + \underline{1} \cdot e_3 + \gamma \cdot e_4$

     $\Rightarrow$ (man kann $u_2$ gegen $e_3$ tauschen) $u_1, e_2, u_2, e_4$ Basis von $V$

  2. Möglichkeit : 6.18

     $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig, $v \notin < v_1, \dots, v_m >_{\mathbb{R}}$

     $\Rightarrow v_1, \dots, v_m, v$ l.u.

     $$U = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

     $\Rightarrow e_1 \notin U \Rightarrow u_1, u_2, e_1$ sind linear unabhängig

     $$< u_1, u_2, e_1 >_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ 2\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

     $e_2 \notin < u_1, u_2, e_1 >_{\mathbb{R}} \Rightarrow u_1, u_2, e_1, e_2$ l.u. $\Rightarrow$ Basis von $V$

## 6.29 Satz

$V$ $\mathbb{R}$ - VR, $\dim(V) = n$

(i) Ist $U$ Unterraum von $V$, dann $\dim(U) \leq n$

(ii) Sind $U, W$ Unterräume von $V$, $U \subseteq W$ und $\dim(U) = \dim(W)$, dann $U = W$

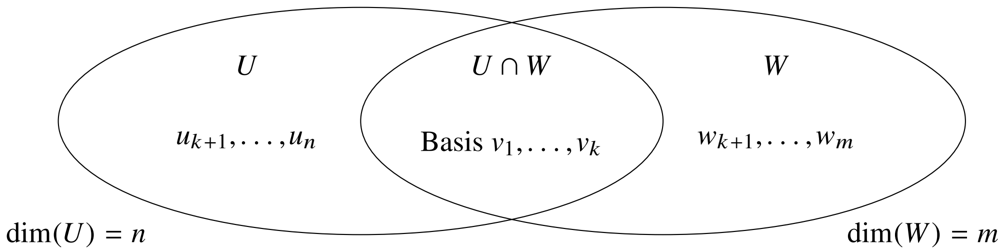
(iii) $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ (Dimensionssatz für Unterräume)
(insbes.: falls $U \cap W = \{O\}$, dann $\dim(U \cap W) = 0$, dann
$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$)

**Beweis**

(i) Basisergänzungssatz 6.24 (ii) : man kann Basis von $U$ zu Basis von $V$ ergänzen.

(ii) $\dim(U) = \dim(W)$ und $U \subseteq W \Rightarrow$ Basis von $U$ = Basis von $W \Rightarrow U = W$

(iii)




Basisergänzungssatz (6.23, 6.24 (ii)):
Wähle $n-k$ Vektoren $u_{k+1}, \dots, u_n$ aus $U$, die $v_1, \dots, v_k$ zu Basis von $U$ ergänzen.
Wähle $m-k$ Vektoren $w_{k+1}, \dots, w_m$ aus $W$, die $v_1, \dots, v_k$ zu Basis von $W$ ergänzen.
zeige: $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n, w_{k+1}, \dots, w_m$ ist Basis von $U+W$
Dann ist $\dim(U+W) = k + (n-k) + (m-k) = \underbrace{n}_{\dim U} + \underbrace{m}_{\dim W} - \underbrace{k}_{\dim(U \cap W)}$ □

## 6.30 Bemerkung (Koordinaten)

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $V$, Vektor $v \in V$ als LK von $v_1, \dots, v_n$:
$v = \underline{\lambda_i} \cdot v_1 + \underline{\lambda_2} \cdot v_2 + \dots + \underline{\lambda_n} \cdot v_n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind eindeutig bestimmt (6.18 b)) und heißen *Koordinaten* von $v$ bezüglich $B$

**Beispiel**

a) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Koordinaten von $v$ bezüglich $B$ sind dann 2, 6, 9

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (Kartesische Koordinaten [1])

[1]Descartes 1596 - 1650

b) $V = \mathbb{R}^3$, andere Basis $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Koordinaten von $v$ bezüglich $B'$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcllcl} 2 & = & \alpha + \beta & \text{(I)} & : & \alpha = 2 - \beta \\ 6 & = & 2\alpha + \gamma & \text{in (II)} & : & 6 = 4 - 2\beta + \gamma \\ & & & & & \Rightarrow \gamma = 2\beta + 2 \\ 9 & = & \beta + 2\gamma & \text{in (III)} & : & 9 = \beta + 4\beta + 4 \\ & & & & & \Rightarrow \beta = 1, \alpha = 1, \gamma = 4 \end{array}$$

# 7 Matrizen & Lineare Gleichungssysteme

## 7.1 Definition

(i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$

Eine *$m \times n$ Matrix $A$ über* $\mathbb{R}$ ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $m$ *Zeilen* und $n$ *Spalten* und Einträgen $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq m)$, $(1 \leq j \leq n)$ $\in \mathbb{R}$

Schreibweise: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1\dots m}}$

$A = (a_{ij})$

(ii) $M_{m,n}(\mathbb{R})$ = Menge aller $m \times n$ - Matrizen über $\mathbb{R}$

$M_n(\mathbb{R})$ = Menge aller $n \times n$ - Matrizen über $\mathbb{R}$ (*quadratische Matrizen*)

(iii) Ist $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ so erhält man die *zu $A$ transponierte* Matrix $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, indem man Zeilen und Spalten von $A$ tauscht.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Es gilt $(A^T)^T = A$

(iv) $1 \times n$ - Matrix : Zeilenvektor der Länge $n$
$m \times 1$- Matrix : Spaltenvektor der Länge $m$

$$O = O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist } \textit{Nullmatrix}$$

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist } n \times n \textit{ Einheitsmatrix}$$

also $E_n = (\delta_{ij})$ mit $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kroneckersymbol}}}{\delta_{ij}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(v) $M_{m,n}(\mathbb{R})$ lässt sich als $\mathbb{R}$- VR auffassen, "Vektoren" sind Matrizen, man braucht Addition und skalare Multiplikation:

für $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \quad \text{(Summe der Matrizen)}$$

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \quad \text{(skalares Vielfaches von } A)$$

$M_{n,m}$ ist dann VR, $O$ ist $O$ (Nullmatrix)

Basis wäre z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

(vi) Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B = (b_{jk})_{\substack{j=1\dots n \\ k=1\dots l}} \in M_{n,l}$ ist das *Matrixprodukt* $A \cdot B$ definiert durch

$$A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{i=1\dots m \\ k=1\dots l}} \in M_{m,l}(\mathbb{R})$$

mit

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

("$i$-te Zeile von $A$ mal $k$-te Spalte von $B$")

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$A \cdot B$ ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von $A$ gleich der Anzahl der Zeilen von $B$ ist.

## 7.2 Beispiele

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A + B$ nicht definiert

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

($B \cdot A$ ist nicht definiert)

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$

Das Matrixprodukt ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$B \cdot A$ nicht definiert, aber $B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

e) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ dann ist $E_m \cdot A = A,\ \ A \cdot E_n = A$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, dann ist $E_n \cdot A = A \cdot E_n = A$

($E_n$ verhält sich wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen)

## 7.3 Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} A, A_1, A_2 & \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ B, B_1, B_2 & \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ C & \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in \mathbb{R} \end{array}$$

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(ii) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

(iii) $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$

(iv) $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

## 7.4 Definition (LGS)

(i) Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems (LGS) über $\mathbb{R}$:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

- $m$ Gleichungen
- $n$ Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$
- Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$
- rechte Seite: $b_n, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

heißt *Lösung* des LGS, wenn die $x_1, \ldots, x_n$ sämtliche Gleichungen erfüllen.

(ii) Ein LGS heißt *homogen*, fall $b_1 = \cdots = b_m = 0$, sonst *inhomogen*

(iii) Setzt man $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (Koeffizientenmatrix),

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \underbrace{M_{m,1}(\mathbb{R})}_{\mathbb{R}^m}$,

so lässt sich $(*)$ in *Matrixform* schreiben als

$$A \cdot x = b$$

(iv) Sind $s_1, \dots, s_n$ Spalten von $A$, so lässt sich $(*)$ in *Spaltenform* schreiben als

$$x_1 \cdot s_1 + \cdots + x_n \cdot s_n = b$$

Beachte: Ein homogenes LGS hat immer mindestens eine Lösung, nämlich $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

die Null-Lösung (*triviale Lösung*)

## 7.5 Satz

(i) Die Menge der Lösungen des homogenen LGS $A \cdot x = O$ bildet einen Unterraum von $\mathbb{R}^n$

(ii) Ist das inhomogene System $A \cdot x = b$ lösbar und $x_0$ irgendeine spezielle Lösung, so erhält man alle Lösungen $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ durch

$$\{x_0 + y \mid Ay = O\}$$

Ist also $U$ der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS $Ax = O$, so ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ von der Form $x_0 + U$

(das nennt man einen *affinen Unterraum*, UR verschoben um $x_0$)

**Beweis**

(i) Folgt aus 7.3 (iii) & (iv)

- $O$ ist Lösung
- Sind $x_1, x_2$ Lösungen den homogenen LGS, d.h. $A \cdot x_1 = O,\ A \cdot x_2 = O$, dann $O = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = A \cdot (x_1 + x_2)$, d.h. $x_1 + x_2$ ist Lösung.
- Ist $x_1$ Lösung, d.h. $A \cdot x_1 = O$, dann $O = \lambda \cdot (Ax_1) = A(\lambda x_1)$, d.h. $\lambda x_1$ ist Lösung

(ii) Sei $A \cdot x_0 = b$

- Ist $A \cdot y = O$, dann $A(x_0 + y) \overset{7.3(iii)}{=} \underbrace{A \cdot x_0}_{b} + \underbrace{A \cdot y}_{O} = b$
- umgekehrt:
  $A \cdot x = b \Rightarrow \underbrace{A \cdot x}_{b} - \underbrace{A \cdot x_0}_{b} = A(\underbrace{x - x_0}_{\in U}) = O$
  wegen $x = x_0 + (\underbrace{x - x_0}_{\in U})$ ist $x \in (x_0 + U)$

## 7.6 Fragen

- Wann hat $Ax = b$ (mind.) eine Lösung? Genau eine Lösung?
- Wie groß ist die Dimension des Lösungsraums von $Ax = \mathcal{O}$?
- Wenn $Ax = b$ eine Lösung hat, wie bestimmt man sie / alle anderen Lösungen?

## 7.7 Bemerkung

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn wir

(1) ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren

(2) eine Gleichung mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ multiplizieren.

(3) zwei Gleichungen vertauschen.

(Diese Operationen entsprechen Operationen an $A$ und $b$, siehe Def. 7.8)

Aus dem LGS $Ax = b$ wird durch solche Operationen ein LGS $A'x = b'$ mit derselben Lösungsmenge.

Ziel des Gauß - Algorithmus: Finde einfache Form von $A'$, mit der sich alle Fragen oben leicht beantworten lassen!

## 7.8 Definition

Unter *elementaren Zeilenumformungen* an einer Matrix versteht man die folgenden Operationen:

(1) Addition des skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

(2) Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\neq 0$

(3) Vertauschen zweier Zeilen

Analog: Elementare Spaltenumformungen

## 7.9 Definition

Ist $A \cdot x = b$ ein LGS, so heißt $(A, b)$ die *erweiterte Koeffizientenmatrix*
(hänge an Matrix $A$ noch $b$ als zusätzliche Spalte an)

Ist $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow (A, b) \in M_{m,n+1}(\mathbb{R})$

### 7.10 Bemerkung

Nach Bemerkung 7.7 gilt:

Führt man an $(A, b)$ elementare Zeilenumformungen durch und erhält dadurch Matrix $(A', b')$, so ist $x \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $Ax = b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung von von $A'x = b'$

Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine sogenannte *Zeilenstufenform* mit $r$ Stufen bringen:

$$\begin{pmatrix} |\,1 & & & & \\ & |\,1 & \dots & & \\ & & |\,1 & \dots & \\ & & & |\,1 & \dots \\ & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

(d.h. in jeder Zeile verringert sich die Anzahl der Variablen um mindestens eine "Stufe")

### 7.11 Algorithmus zur Transformation auf Zeilenstufenform

(1) Suche die erste Spalte, die nicht nur Nullen enthält, Spalte $j_1$

(2) Falls nötig, sorge durch Zeilenvertauschung dafür, dass das Element $a$ an Stelle $(1, j_1)$ ungleich 0 ist.

(3) Multipliziere die erste Zeile mit $\frac{1}{a}$, der Eintrag an Stelle $(1, j_1)$ ist dann 1

(4) Mache alle Einträge in Spalte $j_1$ außer dem in der ersten Zeile zu Null: Addiere dazu jeweils ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

(Ab jetzt wird die erste Zeile nicht mehr benutzt und bleibt unverändert)

(5) Suche die erste Spalte $j_2 (> j_1)$, die unterhalb der ersten Zeile einen Eintrag ungleich 0 hat.

(6) Mache den Eintrag an der Stelle $(2, j_2)$ wie in (2) und (3) zu 1

(7) Mache alle Einträge in Spalte $j_2$ unterhalb der zweiten Zeile zu Null wie in (4) : Addiere dazu jeweils ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile zu den übrigen Zeilen.

(Ab jetzt wird die zweite Zeile nicht mehr benutzt und bleibt unverändert.)

Fahre mit der dritten Zeile fort, usw., solange möglich. Am Ende hat man die Zeilenstufenform erreicht.

### 7.12 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \cdot \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \cdot (-6) + III} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 7.13 Definition

Der *Zeilenrang* einer Matrix $A$ ist die Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilen von $A$.

D.h.: sind $z_1, \ldots, z_m$ die Zeilen von $A$, dann ist der Zeilenrang = dim $< z_1, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}}$.

Analog: *Spaltenrang*

(Man kann zeigen ($\rightarrow$ Mathe III): Zeilenrang = Spaltenrang.
Diese Zahl nennt man auch den *Rang* von $A$, $\operatorname{rg}(A)$)

### 7.14 Satz

Durch elementare Zeilenumformungen ändert sich der Rang der Matrix nicht.

**Beweis**

(1) $< z_1, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}} = < z_1, z_2 + \lambda z_1, z_3, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(2) $< z_1, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}} = < \lambda z_1, z_2, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}} \quad (\lambda \neq 0)$

(3) $< z_1, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}} = < z_2, z_1, \ldots, z_m >_{\mathbb{R}}$

### 7.15 Bemerkung

Bei einer Matrix in Zeilenstufenform ist der Rang direkt ablesbar: er ist die Anzahl der Zeilen $\neq O$ (= Anzahl Stufen).

7.11 liefert also (wegen 7.13) ein einfaches Verfahren zur Rangbestimmung.

(Die Matrix aus 7.12 hat z.B. Rang 2)

### 7.16 Gauß-Algorithmus zur Lösung von LGS

Gegeben: LGS $Ax = v$

- Bilde Matrix $(A, b)$
- Wende Algorithmus 7.11 auf $(A, b)$ an, erhalte Matrix $(\tilde{A}, \tilde{b})$ mit $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform.
  (letzte Spalte muss nicht mehr bearbeitet werden.)
- Man kann noch Spalten in $\tilde{A}$ vertauschen.

  (Achtung: Vertauschung von Spalte $i$ mit Spalte $k$ bedeutet Vertauschung der Unbekannten $x_i$ und $x_k$ ($\rightarrow$ Buch führen, aufpassen!))
- Erhalte so Matrix $(A', b')$ der Form $\left(\begin{array}{cccc|c} 1a'_{12} & \ldots & & a'_{1n} & b'_1 \\ & 1a'_{23} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & 1a'_{r,r+1} \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ & 0 & & & b'_m \end{array}\right)$

  mit $r = \operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(A) \quad r \leq m, r \leq n$

- Neues LGS ist $A' \; x' = b'$,
  $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ entsteht aus $x$ durch Vertauschen der Koordinaten entsprechend der durchgeführten Spaltenvertauschungen.
- Ermittle die Lösungsmenge des LGS:

  (1) Ist $r < m$ und eines der Elemente $b'_{r+1}, \dots, b'_m \neq 0$
  $\Rightarrow$ LGS nicht lösbar!
  (dann ist $\mathrm{rg}(A', b') > \mathrm{rg}(A')$ also auch $\mathrm{rg}(A, b) > \mathrm{rg}(A)$)

  (2) Ist $r = m$ oder $r < m$ und $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$
  $\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine Lösung.
  (dann ist $\mathrm{rg}(A', b') = \mathrm{rg}(A')$, $\mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A)$)

  - $r = n$
    $\Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung:
    Die $x'_1, \dots, x'_n$ sind eindeutig bestimmt:
    $x'_n = b'_n$
    $x'_{n-1} = b'_{n-1} - a'_{n-1} x'_n$
    $\vdots$
    $x'_1 = b'_1 - \sum_{k=2}^n a'_{1k} x'_k$
  - $r < n$
    $\Rightarrow$ Es gibt viele Lösungen.
    Man kann dann $x'_{r+1}, \dots, x'_n$ frei wählen ("freie Variablen")
    $x'_1, \dots, x'_r$ lassen sich dann rekursiv bestimmen:
    $x'_r = b'_r - \sum_{k=r+1}^n a'_{rk} x'_k$
    $\vdots$
    $x'_1 = b'_1 - \sum_{k=2}^n a'_{1k} x'_k$
    Lösungsmenge ist dann

$$\left\{ \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x'_{r+1}, \dots x'_n \in \mathbb{R}, \\ x'_1 \dots, x'_r \text{ wie oben} \end{array} \right\}$$

  $\rightarrow$ Andere Beschreibung:
    finde eine spezielle Lösung $x_0$ von $A'x' = b'$:
    wähle dann z.B. $x'_{r+1} = \cdots = x'_n = 0$, berechne $x'_1 \dots, x'_r$.
    Finde den Lösungsraum $U$ des zugehörigen homogenen LGS $A'x' = O$
    Basis des Lösungsraums:
    Setze $(x'_{r+1}, \dots, x'_n)$ nacheinander
    $(1, 0, 0 \dots, 0, 0)$
    $(0, 1, 0 \dots, 0, 0)$
    $\vdots$
    $(0, 0, 0 \dots, 0, 1)$
    und berechne jeweils $x'_1, \dots, x'_r$
    Nach Satz 7.5 (ii) ist Lösung von $A'x' = b'$ dann $x_0 + U$

## 7.17 Korollar

a) $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A)$

b) $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A) = n$ (Anzahl der Unbekannten)

c) Dimension des Lösungsraums von $Ax = \mathcal{O}$ ist $n - \mathrm{rg}(A)$

Beweis folgt aus 7.16

## 7.18 Beispiel

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[III\,:\,I\cdot(-1)+III]{II\,:\,I\cdot(-2)+II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{III:-II\cdot 2+III} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\mathrm{rg}(A')}_{2} < \underbrace{\mathrm{rg}(A', b')}_{3} \Rightarrow$ keine Lösung

b) Wie a) mit +1 statt -1 in letzter Gleichung:

erhalte: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A', b') \Rightarrow$ einzige Lösung ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $$\begin{aligned} 5x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(tausche I und II)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III:I\cdot(-2)+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[II\,\cdot\,\frac{1}{5}]{III\,:\,II\,\cdot\,\frac{8}{5}+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{41}{5} & -\frac{82}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III\cdot\frac{5}{41}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A', b') = n \Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II:I\cdot(-1)+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\mathrm{rg}(A',b')}_{2} < \underbrace{n}_{4}$

$x_3, x_4$ freie Variablen $\Rightarrow$ Lösungsraum $U$ ist 2-dimensional

(siehe Korollar 7.17: $\dim(U) = n - \mathrm{rg}(A) = 4 - 2 = \underline{2}$)

Finde Basis von $U$:

- $x_3 = 1,\ x_4 = 0$
  Gibt $x_2 = \frac{1}{3}\ \ x_1 = -\frac{5}{3}$
  $\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist 1. Basisvektor von $U$
- $x_3 = 0,\ x_4 = 1$
  Gibt $x_2 = -\frac{2}{3}\ \ x_1 = \frac{1}{3}$
  $\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist 2. Basisvektor von $U$

$$\Rightarrow U =< v_1, v_2 >_{\mathbb{R}} =< \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

$$= \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5\alpha + \beta \\ \alpha - 2\beta \\ 3\alpha \\ 3\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

e) $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -2 \end{array}$

(inhomogenes LGS, das zu homogenem LGS aus d) "gehört")

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \end{array}\right)$$

spezielle Lösung $x_0$:

Wähle $x_3, x_4$ frei (z.B: $x_3 = x_4 = 0$)

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} \mathrm{II}: x_2 + 0 + 0 & = & 3 \Rightarrow x_2 = 3 \\ \mathrm{I}\ : x_1 + 2x_2 + 0 + 0 & = & 7 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

gibt $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung hat die Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ (von d))

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

f) Beispiel mit Spaltenvertauschungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Spalte I}\leftrightarrow\text{Spalte II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Lösungsraum $U$ des zugehörigen homogenen LGS hat Dimension 1

Einsetzen von z.B $x_3 = 1 \Rightarrow \begin{aligned} x_2' &= 0 + 2 = 2 \\ x_1' &= -(2+1) = -3 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ Basisvektor ist $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}'$ also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow U = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungsmenge des inhomogenen LGS:
spezielle Lösung, setze z.B. $x_3 = 0$:

$$\begin{aligned} x_2' &= 1 \quad (= x_1) \\ x_1' &= -1 \quad (= x_2) \end{aligned} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsraum ist dann $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$