# Mathematik II für Informatiker und Bioinformatiker

Prof. P. Hauck[1]

Sommersemester 2009

Stand: 24.07.2009 02:00 Uhr

[1]Mitschrift: Alexander Peltzer; Korrektur: Gregor Kovacs, Benjamin Matthes

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Beim vorliegenden Text handelt es sich um eine inoffizielle Mitschrift. Als solche kann sie selbstverständlich Fehler enthalten und ist daher für Übungsblätter und Klausuren nicht zitierfähig.

Korrekturen und Verbesserungsvorschläge sind jederzeit willkommen und können an gregor.kovacs@student.uni-tuebingen.de oder alex.peltzer@gmail.com gerichtet werden.

Der Text wurde mit LaTeX2e in Verbindung mit dem AMS-TeX-Paket für die mathematischen Formeln gesetzt.

# Kapitel 0

# Einleitung

Dozent:

- Professor Dr. Peter Hauck
  Tel.: +49 (0)7071 29 70465-1
  Email: hauck@informatik.uni-tuebingen.de

Vorlesungszeiten:

- Montag 10-12 Uhr Hörsaalzentrum N3
- Mittwoch 10-12 Uhr Hörsaalzentrum N9

Bedingungen für den Scheinerwerb:

- Mindestens 50 Prozent der über die mit * gekennzeichneten Übungsaufgaben zu erreichenden Punkte
- Mindestens einmal vorrechnen in der Übungsgruppe
- Bestehen des Testates und der Klausur

Übungsleitung;

- Stefanie Reifferscheidt
  reiffers@informatik.uni-tuebingen.de
- https://cis.informatik.uni-tuebingen.de/mathe2-ss-09/

Literatur:

- Wolff, Hauck, Küchlin: Mathematik für Informatik und Bioinformatik, Springer 2004, http://min.informatik.uni-tuebingen.de/
- D. Hachenberger: Mathematik für Informatiker, Pearson
- W. Stuckmann, D. Wätjen: Mathematik für Informatiker: Grundlagen und Anwendungen, Spektrum
- M. Wolff: Übungsaufgaben, Springer 2006

# Kapitel 1

# Mathematisches Argumentieren

## §1 Ringe und Körper

**1.1 Definition** R Menge mit zwei Verknüpfungen + und ·. (R,+,·) heißt Ring:

(1) (R, +) kommutative Gruppe

(2) (R, ·) Halbgruppe

(3) a · (b + c) = a · b + a · c und
(a + b) · c = a · c + b · c $\forall a, b, c \in R$ (Distributivgesetz, Punkt vor Strich)

Konventionelle Schreibweise: Neutrales Element bezüglich + : 0.
Inverse zu x ∈ R bezüglich +: -x. (x + (-x)) = 0
x+ (- y) = x-y

**1.2 Satz**
*(R, +, ·) Ring. Dann gilt* $\forall x, y \in R$ :

*a.) 0 · x = x · 0 = 0*

*b.) (-x) · y = x · (-y) = -(x · y)*

*c.) (-x) · (-y) = x · y*

**Beweis**

a.) 0 · x = (0 + 0) · x = 0 · x + 0 · x / Addition auf beiden Seiten - ( 0 · x)
0 = 0 · x + 0 = 0 · x : Analog hierzu x · 0 = 0.

b.) $(-x) \cdot y + x \cdot y$ = (-x + x) · y = 0 · y = (nach a) 0 , also (-x) · y = - (x · y):
Analog x · (-y) = - (x · y)

c.) (-x) · (-y) =(nach b) - (x · (-y)) = (nach b) - ( - (x · y))= x · y. □

**1.3 Definition** (R, +, ·) Ring:

(1) R heißt kommutativer Ring, falls a · b = b · a ∀ a, b ∈ R.

(2) R heißt Ring mit Eins, falls (R, ·) Monoid ist, das heißt ∃ neutrales Element bzgl. der Multiplikation ·, 1. $(1 \cdot x = x \cdot 1 = x \, \forall x \in R.) 1 \neq 0$

**1.4 Beispiele**

a.) ( ℤ, +, ·) (normale Addition und Multiplikation von Zahlen). Kommutativer Ring mit Eins.

b.) ($\mathbb{Z}_n$ = 0,··· n-1 , ($\mathbb{Z}_n$, ⊕, ⊙) kommutativer Ring mit Eins.
1.1(1) ✓
1.1(2) ✓+ Kommutativität, neutrales Element bezüglich ⊙.
Distributivgesetz: zu zeigen a ⊙ (b ⊕ c) $\overset{!}{=}$ a ⊙ b ⊕ a ⊙ c

a ⊙ (b ⊕ c) = a ⊙ ((b + c) mod n) = (a · ((b + c) mod n)) mod n (MI/6.13)
= (a · (b + c)) mod $n$ = (a · b + a · c) mod n = (MI/6.13) ((a · b mod n) + (a · c mod n)) mod n = a ⊙ b ⊕ a ⊙ c
Welche Elemente in ($\mathbb{Z}_n$, ⊕, ⊙) sind invertierbar bezüglich ⊙ ?
x ∈ $\mathbb{Z}_n$ invertierbar ⇔ ggT ( x, n) = 1
"⇐": s, t ∈ ℤ: s · x + t · n = 1, s · x ≡ 1 (mod n)
((s mod n) · x) mod n = 1 , d ⊙ x = 1, d = $x^{-1}$

c.) $R_1, \ldots, R_n$ Ringe.
$R_1 \times \cdots \times R_n$ wird Ring durch folgende Verknüpfungen:
$(r_1, \ldots r_n) + (r_1', \ldots, r_n')$: = $(r_1 + r_1', \ldots, r_n + r_n')$
direkte Summe: $(R_1 \times \cdots \times R_n, +, \cdot) = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n)$
$R_1, \ldots, R_n$ kommmutativ, dann auch $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$
$R_1, \ldots, R_n$ Ringe mit 1, dann auch $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$
Eins: $(1_{R_1}, \ldots, 1_{R_n})$

**1.5 Satz (Binomialsatz)**
*Sei R kommutativer Ring: a,b ∈ ℝ, n ∈ ℕ.*
*Dann ist*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

$[a^0 \cdot b^n = b^n, a^n \cdot b^0 = a^n]$

**Beweis** Wie Binomialsatz in ℝ (siehe Mathe I, 7.15) □

**1.6 Definition** R Ring mit Eins.

a.) Die Elemente von R, die bezüglich · ein Inverses besitzen, heißen Einheiten von R.
$R^* = \{x \in R : \exists x^{-1} \in R$ mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}$
$0 \notin R^* \nexists y \in R$ mit $0 \cdot y = 1$ (($R^*$, ·) Gruppe, aber mit + zusammen kein Ring)

b.) Ist R zusätzlich kommutativ und gilt $R^*$ = R \ {0} , so heißt R ein Körper.

**1.7 Beispiele** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ : Körper (jeweils Multiplikation und Addition von Zahlen) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ kommmutativer Ring mit Eins, aber kein Körper, da nur $1, -1$ Einheiten sind.

**1.8 Satz**
*Nullteilerfreiheit in Körpern*
*Ist $K$ ein Körper, $x, y \in K$*
*Ist $x \cdot y = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$.*

**Beweis** Sei $x \cdot y = 0$, Ang. $x \neq 0$. Dann ex $x^{-1} \in K$

$$y = (x^{-1}x) \cdot y = x^{-1}(x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 \underset{1.2a.)}{=} 0$$

**Beispiel** $(\mathbb{Z}_6,\oplus,\odot)$ kommutativer Ring mit Eins

**1.9 Satz**
*Sei $n > 1$.*

$$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot) \text{ ist Körper } \Leftrightarrow n \text{ ist Primzahl}$$

**Beweis** $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist kommutativer Ring mit Eins.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n \text{ Körper} &\Leftrightarrow \mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \backslash \{0\} \\ &\Leftrightarrow ggT(x, n) = 1 \;\forall\; 0 < x < n \\ &\Leftrightarrow n \text{ ist Primzahl} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2=\{0, 1\}$ Körper der Bits:
Add $\Leftrightarrow$ XOR- Verknüpfung
Multi $\Leftrightarrow$ $\wedge$ Verknüpfung. □

**1.10 Definition** $R$, $R'$ Ringe.

a.) $\varphi$: $R \to R'$ heißt (Ring-) Homomorphismus, falls

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \;\forall x, y \in \mathbb{R}$$

b.) Bijektiver Homomorphismus: Isomorphismus

c.) Existiert ein Isomorphismus $R \to R'$, so heißen $R, R'$ isomorph, $R \cong R'$.

**1.11 Beispiel**

a.) $\varphi : \begin{cases} (\mathbb{Z}, +, \cdot) & \to (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot) \\ x & \mapsto x \mod n \end{cases}$
$\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$
$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$
vgl. Übungsaufgabe 2, Matheblatt 1

b.) $n \in \mathbb{N}$. $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$, $ggT(n_i, n_j) = 1 \;\forall i \neq j$.
$\psi : \begin{cases} Z_n & \to \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \\ x & \mapsto (x \mod n_1, x \mod n_2, \ldots, x \mod n_k) \end{cases}$
ist Ringisomorphismus.

Nachrechnen: $\psi$ ist Ringisomorphismus
Gleich: $\psi$ ist surjektiv!
$|\mathbb{Z}_n| = n$
$|\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}| = \prod_{i=1}^{k} |\mathbb{Z}_{n_i}| = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = n$
Also $\psi$ bijektiv. (vgl. MI/3.5) $\alpha$: A $\to$ B surjektiv.
$\forall b \in B\ \exists a \in A : \alpha(a) = b$,
Surjektivität von $\psi$:
$(a_1, \ldots, a_k) \in Z_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$,
Es gibt $x \in \mathbb{Z}_n$ , das heißt $0 \leq x < n$
mit $\underbrace{\psi(x)}_{(x \mod n_1, \ldots, x \mod n_k)} = (a_1, \ldots a_k)$
$0 \leq a_1 < n_1$
$0 \leq a_2 < n_2$
$0 \leq a_k < n_k$
$x \mod n_1 = a_1$
$x \mod n_2 = a_2$
$\vdots$
$x \mod n_k = a_k$

**1.12 Satz (Chinesischer Restsatz)**
*Seien $n_1, \ldots, n_k$ paarweise teilerfremde natürliche Zahlen.*
*Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Setze $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$*
*Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq x < n$ und*

$$x \equiv a_1(\mod n_1), x \equiv a_2(\mod n_2), \ldots, x \equiv a_k(\mod n_k)$$

*Falls $a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}(0 \leq a_i < n_i)$*
*so bedeutet $x \equiv a_i(\mod n_i)$*
*dasselbe wie $x \mod n_i = a_i$*

**Beweis (Rechenverfahren)** $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$N_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} n_j = \frac{n}{n_i}$$

Dann sind $N_i, n_i$ teilerfremd.
(MI/6.20a, MI/6.17,6.18 Erweiterter Euklidischer Algorithmus)
Es existieren $s_i, t_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$t_i \cdot N_i + s_i \cdot n_i = 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

$t_i \cdot N_i \equiv 1(\mod n_i)$
$a_i \cdot t_i \cdot N_i \equiv a_i(\mod n_i)$
$t_i \cdot N_i \equiv 0(\mod n_j), \forall j \neq i$
$a_i \cdot t_i \cdot N_i \equiv 0(\mod n_j) \forall j \neq i$
$y = a_1 t_1 N_1 + a_2 t_2 N_2 + \ldots + a_k t_k N_k$
$y \equiv a_1(\mod n_1)$
$y \equiv a_2(\mod n_2)$

$\vdots$
$y \equiv a_k(\mod n_k)$
Setze $x = y \mod n$ $\square$

**Beispiel**
Was ist $2^{1000} \mod 1155$?
$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
Berechne $2^{1000} \mod 3, 5, 7, 11$
$2^{1000} \mod 3 = (-1)^{1000} \mod 3 = 1$
$2^{1000} \mod 5 = 2^{2 \cdot 500} \mod 5 = 4^{500} \mod 5 = (-1)^{500} \mod 5 = 1$
$2^{1000} \mod 7 = 2^{3 \cdot 333+1} \mod 7 = (2^3)^{333} \cdot 2 \mod 7 = 1^{333} \cdot 2 \mod 7 = 2$
$2^{1000} \mod 11 = 2^{5^{200}} \mod 11 = 32^{200} \mod 11 = (-1)^{200} \mod 11 = 1$

Suche x mit $0 \leq x < 1155$ mit $x \equiv 1(\mod 3), x \equiv 1(\mod 5)$,
$x \equiv 2(\mod 7), x \equiv 1(\mod 11)$ Dann $x \equiv 2^{1000}(\mod 3, 5, 7, 11)$
$3, 5, 7, 11 | 2^{1000} - x \underset{MI/6.20b}{\Rightarrow} \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}_{1155} | 2^{1000} - x$
$x \equiv 2^{1000}(\mod 1155)$
$2^{1000} \mod 1155 = x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n_1 = 3$ | $n_2 = 5$ | $n_3 = 7$ | $n_4 = 11$ |
| $N_1 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ | $N_2 = 231$ | $N_3 = 165$ | $N_4 = 105$ |

$1 \cdot 385 \equiv 1(\mod 3) \quad 1 \cdot 231 \equiv 1(\mod 5)$
$2 \cdot 165 \equiv 1(\mod 7) \quad 2 \cdot 105 \equiv 1(\mod 11)$
$y = 1 \cdot 1 \cdot 385 + 1 \cdot 1 \cdot 231 + 2 \cdot 2 \cdot 165 + 1 \cdot 2 \cdot 105$
$= 385 + 231 + 660 + 210 = 1486$
$x = y \mod 1155 = 331$
$\Rightarrow 2^{1000} \mod 1155 = 331$

**Beispiel** Euler'sche $\varphi$- Funktion.
$\varphi(n) =$ Anzahl der $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n,$ mit $ggT(k, n) = 1$

**1.13 Korollar** *Sei $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \in \mathbb{N}$ mit $ggT(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$ (teilerfremde Zerlegung). Dann ist*
$$\varphi(n) = \varphi(n_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_k)$$
*Insbesondere: Ist $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$, $p_i$ Primzahlen, $a_i > 0, p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ so ist*
$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i - 1}(p_i - 1)$$

**Beweis** $\psi$ aus 1.11b.) ist Isomorphismus. Isomorphismus bildet Einheiten auf Einheiten ab:
$x \in \mathbb{Z}_n$ invertierbar, das heißt $\exists x^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ mit $x \odot x^{-1} = 1$, dann ist $\psi(x)$ invertierbar:
$\psi(x) \cdot \underbrace{\psi(x^{-1})}_{\psi(x)^{-1}} = \psi(x \cdot x^{-1}) = \psi(1) = 1$
Anzahl der Einheiten in $Z_n$ = Anzahl der Einheiten in $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$
$(a_1, \ldots, a_{n_k})$ invertierbar $\Rightarrow$
$$(1_{\mathbb{Z}_{n_1}}, \ldots, 1_{\mathbb{Z}_{n_k}}) \Leftrightarrow \begin{array}{c} a_1 \text{ invertierbar } in Z_{n_1} \\ \vdots \\ a_k \text{ invertierbar in } Z_{n_k} \end{array}$$
$ggT(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$ für $i \neq j$, wobei p Prim-

zahl, $a \in \mathbb{N}$.
$\varphi(p^a)$ ?
$\varphi(p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}) = \varphi(p_1^{a_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_r^{a_r}) = \prod_{i=1}^r P_i^{a_i-1} \cdot (P_i - 1)$
Nicht teilerfremd zu $p^a$ sind die Vielfachen von $p$.
Unterhalb $p^a$ gibt es davon genau $\frac{p^a}{p} = p^{a-1}$. Rest: $p^a - p^{a-1} = p^{a-1} \cdot (p-1)$

Im Folgenden: Polynome nicht als Funktionen betrachten, sondern als formale Ausdrücke. □

**1.14 Definition** Sei K ein Körper mit Einselement 1 und Nullelement 0.

a.) Ein Polynom über dem Körper $K$ ist ein Ausdruck

$$f(x) = f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K$$

$a_i$ Koeffizienten von f (+ ist zunächst rein formales Symbol)
Ist $a_i = 0$, so kann man $0 \cdot x^i$ weglassen.
Statt $a_0 x^0$ schreibt man $a_0$.
Sind alle $a_i = 0 : f = 0$ Nullpolynom.
Ist $a_i = 1$, so schreibt man $x^i$ statt $1 \cdot x^i$.

b.) Zwei Polynome
$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ und $g = b_0 + b_1 x + \ldots b_m x^m$
sind gleich wenn entweder $f = 0$ und $g = 0$ oder $f \neq 0$ und $g \neq 0$ und falls $a_n$ der höchste Koeffizient $\neq 0$ von $f$ und $b_m$ der höchste Koeffizient $\neq 0$ von g ist,
so $m = n$ und $a_i = b_i$ für $i = 0, \ldots, n$.

c.) Die Reihenfolge der $a_i \cdot x^i$ in der Darstellung von $f$ kann vertauscht werden, ohne $f$ zu ändern.

d.) Die Menge aller Polynome über $K$ wird mit $K[x]$ bezeichnet.

**Beispiel** Addition und Multiplikation auf $K[x]$ definieren.
$f = 3x^2 + x + 1,\ g = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$
$f + g = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x$
$f \cdot g = (3x^2 + x + 1) \cdot (\frac{1}{2}x^4 + x^3 + x - 1) =$
$= \frac{3}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 3x^3 + x^2 + x3x^2 - x - 1$
$= \frac{3}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 1$

**1.15 Satz**
*Sei K ein Körper. $K[x]$ wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:*

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^j$$

*Hieraus folgt:*

$$f + g := \sum_{i=0}^{max(n,m)} (a_i + b_i) \cdot x^i$$

*Sowie:*

$$f \cdot g := \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

$$\textit{wobei } c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \ldots + a_i b_0 \ \textit{(Faltungsprodukt)}$$

*Jedes $a_i$ mit $i > n$ und jedes $b_j$ mit $j > m$ ist als 0 zu setzen.*
*Das Einselement in $K[x]$ ist das Polynom $1 (a_0 = 1, a_i = 0, i > 1)$*
*Das Nullelement in $K[x]$ ist das Nullpolynom.*
*$K[x]$ heißt der Polynomring (in einer Variablen) über $K$.*

**Beweis** Nachrechnen, Übung. □

**1.16 Bemerkung**

a.) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
$x \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} x^i = a_0 \cdot x + a_1 \cdot x^2 + \ldots + a_n x^{n+1}$

b.) Das + Zeichen in der Darstellung der Polynome entspricht der Addition der „Monome“ $a_i x^i$.

**1.17 Definition** Sei $0 \neq f \in K[x]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$.
Dann heißt $n$ der Grad von $f$, $Grad(f) = n$.

$$Grad(0) := -\infty$$

Polynome vom Grad 0: konstante Polynome $\neq 0$

**1.18 Bemerkung** Darstellung von Polynomen auf dem Computer:
$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$
$(b_0, b_1, \ldots, b_m) \leftrightarrow b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^m$
Addition: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_m)$
Multiplikation: $(c_0, c_1, \ldots, c_{n+m})$, $c_i$ berechnen mit Faltungsprodukt
Andere Darstellung im Computer
$x^{10000} + x + 1$
$((1, 0), (1, 1), (1, 10000))$
$((a_i, i) : a_i \neq 0)$

**1.19 Satz (Gradformel)**
*$K$ Körper, $f, g \in K[x]$.*
*Dann ist*

$$Grad(f \cdot g) = Grad(f) + Grad(g)$$

$(-\infty + n = -\infty, -\infty + -\infty = -\infty)$

**Beweis** $f = 0$ oder $g = 0$, so ist $f \cdot g = 0$
$Grad(f \cdot g) = -\infty$
$Grad(f) + Grad(g) = -\infty$
Sei $f \neq 0$ und $g \neq 0$
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$ , das heißt $n = Grad(f)$
$g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ mit $b_m \neq 0$ , das heißt $m = Grad(g)$
Höchste Potenz in $f \cdot g$: $a_n b_m x^{n+m}$
1.8: $a_n \neq 0, b_m \neq 0 \Rightarrow a_n b_m \neq 0, also Grad(f \cdot g) = n + m = Grad(f) + Grad(g)$ □

**1.20 Korollar** *Die Einheiten der (= bezüglich der Multiplikation invertierbarer Elemente) in $K[x]$ sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$.*

**Beweis** $Grad(f) = 0, f = a_0 \neq 0$
$f^{-1} = \underbrace{a_0^{-1}}_{\text{in } K} \quad f \cdot f^{-1} = 1$
$Grad(f) > 0$
Angenommen es existieren $f^{-1} \in K[x]$ Dann $Grad(f^{-1} \geq 0$.
$f \cdot f^{-1} = 1$
$Grad(f) + Grad(f^{-1}) \overset{1.19}{=} Grad(f \cdot f^{-1}) = Grad(1) = 0$
$\underbrace{> 0 \qquad \geq 0}_{0}$
Widerspruch □

**1.21 Definition** $a \in K$,

$$\varphi_a : \begin{cases} K[x] & \to K_n \\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i & \mapsto \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i a^i}_{f(a)} \end{cases}$$

ist Homomorphismus.

**Beispiel:**

| | | |
|---|---|---|
| $(f+g)(a)$ | $=$ | $f(a) + g(a)$ |
| $(f \cdot g)(a)$ | $=$ | $f(a) \cdot g(a)$ |
| Polynommultiplikation | | Multiplikation in $K$ |
| $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ | | $a \in \mathbb{Q} f(a) = a^3 + a + 1$ |
| $g = x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ | | $g(a) = a^2 + 2$ |
| $f \cdot g = x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2$ | | $f(a) \cdot g(a)$ |
| $(f \cdot g)(a) = a^5 + 3a^3 + a^2 + 2a + 2$ | | |
| $3 + 3 + 1 + 1 =$ | | |
| 8Multiplikationen, 4 Additionen | | |

$= 2 + a \cdot (2 + a \cdot (1 + a\dot{(}3 + a^2)))$

**1.22 Bemerkung** Wie berechnet man $f(a)$ möglichst schnell?
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$
$f(a) = a_0 + a \cdot (a_1 + a \cdot (a_2 + \ldots + a(a_{n-1} + a \cdot a_n) \ldots))$
Maximal n Multiplikationen , n Additionen.
So genanntes **Horner Schema**

**1.23 Definition** $f, g \in K[x]. f$ teilt $g (f|g)$
genau dann, wenn $q \in K[x]$ existiert mit $g = f \cdot q$
Falls $g \neq 0$, so $Grad(f) \leq Grad(g)$

**1.24 Satz (Division mit Rest)**
*$K$ Körper, $0 \neq f \in K[x]$, $g \in K[x]$*
*Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$*
*mit $g = q \cdot f + r$ mit $Grad(r) < Grad(f)$*

$(r := g\ mod\ f, q := g\ div\ f)$
*(WHK, Satz 4.69)*

## 1.25 Beispiele

a.) $g = x^4 + 2x^3 - x + 2, f = 3x^2 - 1, \quad f, g \in \mathbb{Q}[x]$

$$
\begin{array}{l}
x^4 + 2x^3 \qquad - x + 2 \quad : \quad 3x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \Leftarrow q \\
\underline{x^4 \quad - \frac{1}{3}x^2} \\
\quad 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 2 \\
\quad \underline{2x^3 \qquad - \frac{2}{3}x} \\
\qquad\quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \\
\qquad\quad \underline{\frac{1}{3}x^2 \qquad\quad - \frac{1}{9}} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \Leftarrow r
\end{array}
$$

b.) $g = x^4 + x^2 + 1, f = x^2 + x, \quad f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$

$x^4 + x^2 + 1 : x^2 + x = x^2$ Wie bei a.) aber: $-1 = 1$ da in $\mathbb{Z}_2[x]$

$g = x^4 + x^2 + 1, \quad f = x^2 + x \quad f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$

$g = x^4 + x^2 + 1 : x^2 + x$ Wie bei a.) aber: $-1 = 2$ da in $\mathbb{Z}_3[x]$

**1.26 Korollar** *K Körper. $f \in K[x]$ ist durch $x - a$ teilbar*

$$a \in K \Leftrightarrow f(a) = 0 \quad \textit{(a ist Nullstelle von f)}$$

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ “ $f = (x - a) \cdot q$
$f(a) = (a - a) \cdot q(a) = 0$

“ $\Leftarrow$ “ Sei $f(a) = 0$
Division von f durch x-a mit Rest (1.24)
$f = (x - a) \cdot q + r, Grad(r) < Grad(x - a) = 1 \quad Grad(r) = 0, -\infty$
r konstantes Polynom
$0 = f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r \qquad r = 0$
$f = (x - a) \cdot q, \qquad (x - a)|f$ □

## 1.27 Bemerkung

a.) $f, g \in K[x], 0 \neq a \in K$.
Dann : $f \mid g \Rightarrow a \cdot f \mid g$ und $f \mid a \cdot g$
$(g = f \cdot q \Rightarrow g = (a \cdot f)(a^{-1} \cdot q)$, das heißt $a \cdot f|g$
$(a \cdot g = f \cdot (a \cdot g)$, das heißt $f \mid a \cdot g$
Beispiel:
$(x + 1) \mid (x^2 + 2x + 1$
$x^2 + 2x + 1 = (x + 1) \cdot (x + 1)$
$2x + 2 \mid x^2 + 2x + 1$
$x^2 + 2x + 1 = (2x + 2) \cdot (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$

b.) Ist $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$
$a_n^{-1} f = x^n + \underbrace{a_n^{-1} a_{n-1}} x^{n-1} + \ldots + \underbrace{a_n^{-1} a_0}.$ Falls $f \mid g$, so $a_n^{-1} f \mid g$ (nach a)

Ein Polynom, dessen höchster von Null verschiedener Koeffizient gleich 1 ist, heißt normiert.

### 1.28 Definition

a.) $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0.
$f \in K[x]$ heißt **größter gemeinsamer Teiler** von g und h, falls f normiertes Polynom von maximalem Grad ist, das g und h teilt.

b.) $g, h \in K[x] \backslash \{0\}$. f heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von g und h, falls f normiertes Polynom von kleinstem Grad ist, das von g und h geteilt wird.

### 1.29 Definition

a.) Kleinstes gemeinsames Vielfaches existiert und ist eindeutig bestimmt:
Existenz klar, da $g, h \mid g \cdot h$ (also existieren gemeinsame Vielfache, daher gemeinsame Vielfache von kleinstem Grad.)
Eindeutigkeit: $g, h \mid f_1, f_2; \quad f_1, f_2$ von minimalem Grad, normiert.

b.) Größter gemeinsamer Teiler existiert; Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Bézout.

### 1.30 Satz (von Bézout)

*(E. Bézout, 1730-1783)*
*K Körper, $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0. Ist $f$ ein größter gemeinsamer Teiler von g und h, so existiert $s, t \in K[x]$ mit $f = s \cdot g + t \cdot h$*

**Beweis** später mit erweitertem Euklidischen Algorithmus für Polynome □

**1.31 Korollar** *K Körper, $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0.*

*a.) Der größte gemeinsame Teiler von g und h ist eindeutig bestimmt: $ggT(g, h)$.*

*b.) $f \mid g$ und $f \mid h \Rightarrow f \mid ggT(g, h)$*

**Beweis** a.) $f_1, f_2$ normiert von maximalem Grad mit $f_1 \mid g, h$ und $f_2 \mid g, h$.
Laut 1.30: $f_1 = s_1 \cdot g + t_1 \cdot h \qquad f_2 \mid g \Rightarrow f_2 \mid s_1 \cdot g; \quad f_2 \mid h \Rightarrow f_2 \mid t_1 \cdot h.$
$f_2 \mid s_1 \cdot g + t_1 \cdot h = f_1 \qquad f_2 \mid f_1 \qquad f_1 = f_2 \cdot q$
Gradformel: Grad$(f_1)$ = Grad$(f_2)$ + Grad$(q)$
Grad$(q) = 0$, das heißt $q$ Konstante.
$f_1, f_2$ normiert $\Rightarrow q = 1, f_1 = f_2$

b.) $ggT(g, h) = s \cdot g + t \cdot h$
$f \mid g, h \Rightarrow f \mid s \cdot g + t \cdot h$ □

**1.32 Satz (Euklidischer Algorithmus für Polynome)**
*K Körper. Der folgende Algorithmus liefert den ggT zweier Polynome $g, h \in K[x]$ nicht beide = 0.*

**procedure** $ggT(g, h)$
  ***if*** $h = 0$ ***then***
    $z := g$
  ***end if***
  ***if*** $h \mid g$ ***then***
    $z := h$
  ***end if***
  ***if*** $h \neq 0$ ***AND*** $h \nmid g$ ***then***
    $y := g, z := h$
    ***while*** $y \bmod z \neq 0$ ***do***
      $r := y \mod z;\ y := z,\ z := r$
    ***end while***
  ***end if***

$d := a_n^{-1} \cdot z$  *($a_n$ höchster Koeffizient $\neq 0$ von $z$)*
$(d = ggT(g, h))$

**Beweis** Wie in $\mathbb{Z}$. Terminiert, da die Grade der Reste echt kleiner werden. □

**1.33 Satz (Erweiterter Euklidischer Algorithmus für Polynome)**
*K Körper. Der folgende Algorithmus liefert den ggT zweier Polynome $g, h \in K[x]$, nicht beide 0 und $s, t \in K[x]$ mit $ggT(g, h) = s \cdot g + t \cdot h$* **procedure**
  ***if*** $h = 0$ ***then***
    $z := g;\ s := 1;\ t := 0;$
  ***end if***
  ***if*** $h \mid g$ ***then***
    $z := h;\ s := 0;\ t := 1;$
  ***end if***
  ***if*** $h \nmid g$ ***and*** $h \neq 0$ ***then***
    $y := g;\ z := h; s_1 := 1;\ s_2 := 0;\ s := 0; t_1 := 0; t_2 := 1;\ t := 1;$
    ***while*** $y \bmod z \neq 0$ ***do***
      $q := y \operatorname{div} z;\ r := y \mod z;$
      $s := s_1 - q \cdot s_2;\ t := t_1 - q \cdot t_2;$
      $s_1 := s_2;\ s_2 := s;\ t_1 := t_2; t_2 := t;$
      $y := z;\ z := r;$
    ***end while***
  ***end if***

$d := a_n^{-1} \cdot z$ *($a_n$ höchster Koeffizient $\neq 0$ von $z$.)*
$s := a_n^{-1} \cdot s;$
$t := a_n^{-1} \cdot t;$
$(d = ggT(g, h) \qquad d = s \cdot g + t \cdot h)$

**Beweis** Wie bei $\mathbb{Z}$. □

**1.34 Beispiel**
$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 \quad h = x^3 + 2x^2 + 2 \quad g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$

| y mod z | y | z | $s_1$ | $s_2$ | s | $t_1$ | $t_2$ | t | q | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + x$ | g | h | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
| $2x + 2$ | h | $x^2 + x$ | 0 | 1 | 1 | 1 | $2x + 1$ | $2x + 1$ | x+2 | $x^2 + x$ |
| 0 | $x^2 + x$ | $2x + 2$ | 1 | $2x + 2$ | $2x + 2$ | $2x + 1$ | $x^2$ | $x^2$ | $x + 1$ | $2x + 2$ |

$d := x + 1 = ggT(g, h)$
$s := x + 1, t := 2x^2$ Die Polynomdivisionen (Achtung, in $\mathbb{Z}_3$ gerechnet!):
$x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 \ : \ x^3 + 2x^2 + 2 \ = \ x + 2 \quad \Leftarrow q$
$\underline{x^4 + 2x^3 + 2x}$
$2x^3 + 2x^2 + x + 1$
$\underline{2x^3 + x^2 + 1}$
$x^2 + x \quad \Leftarrow r \ x^3 + 2x^2 + 2 \ : \ x^2 + x \ = \ x + 1 \quad \Leftarrow q$
$\underline{x^3 + x^2}$
$x^2 + 2$
$\underline{x^2 + x}$
$2x + 2 \quad \Leftarrow r \ x^2 + x \ : \ 2x + 2 \ = \ 2x \quad \Leftarrow q$
$\underline{x^2 + x}$
$0$
Überprüfe: $s \cdot q + t \cdot h = (x + 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) + 2x^2(x^3 + 2x^2 + 2)$
$= x^5 + x^{+}2x^3 + x + x^4 + x^3 + 2x^3 + 1 + 2x^5 + x^4 + x^2 = x + 1 \quad \checkmark$

**1.35 Definition** Ein Polynom $p \in K[x], Grad(p) \geq 1$, heißt irreduzibel, falls gilt:
Ist $p = f \cdot g$ mit $f, g \in K[x]$, so ist $Grad(f) = 0$ oder $Grad(g) = 0$
Ist $p \in K[x], a \neq 0, a \in K$, so ist $p = \underbrace{a}_{Grad=0} \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot p)}_{Grad(p)}$

**1.36 Beispiele**

a.) $p := ax + b \in K[x], a \neq 0$, ist irreduzibel.
Angenommen $p = f \cdot g$
$1 = Grad(p) = Grad(f) + Grad(g) \Rightarrow Grad(f) = 0$ oder $Grad(g) = 0$

b.) $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel:
Angenommen nicht: $\underbrace{x^2 - 2}_{Grad2} = f \cdot g$ mit $Grad(f) \geq 1, Grad(g) \geq 1$.
$f = ax + b, g = cx + d, a \neq 0, c \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
$f$ hat Nullstelle $-\frac{b}{a} =: s$. $\qquad s^2 - 2 = \underbrace{f(s)}_{=0} \cdot g(s) = 0$
Aber Nullstellen von $x^2 - 2$ sind $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Das heißt $x^2 - 2$ ist irreduzibel.
$x^2 - 2$ ist nicht irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$. $\quad x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

c.) $x^2 + x + 5 \in \mathbb{R}[x]$ ist irreduzibel.
Angenommen nicht, dann wie in b:
$x^2 + x + 5$ hat Nullstelle in $\mathbb{R}$.
$x^2 + x + 5 = 0$ hat keine reellen Lösungen $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 5}$ existiert nicht in $\mathbb{R}$.

d.) $x^2 + x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$ 1 ist Nullstelle, da wir mod 7 rechnen.
1.26: $x - 1 = x + 6 \mid x^2 + x + 5$
$x^2 + x + 5 : (x + 6) = x + 2$ (Polynomdivision)
$x^2 + x + 5 = (x + 6) \cdot (x + 2)$

**1.37 Satz**
*Sei $f \in K[x], Grad(f) \geq 1$. Dann sind gleichwertig:*

*(1) f ist irreduzibel*

*(2) Falls $f \mid g \cdot h, \quad g, h \in K[x]$, so ist $f \mid g$ oder $f \mid h$*

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2), $\quad f \in K[x]$ irreduzibel,
Sei $f \mid g \cdot h$, zu zeigen: $f \mid g$ oder $f \mid h$.
Angenommen $f \nmid g$, $ggT(f, g) = 1$, da f irreduzibel und $f \nmid g$
1.30(1.33): $\exists s, t \in K[x]$ mit $1 = s \cdot f + t \cdot g$
Multiplikation mit h: $h = \underbrace{s \cdot f \cdot h} + \underbrace{t \cdot g \cdot h}$
$f \mid g \cdot h \Rightarrow f \mid t \cdot g \cdot h, \quad f \mid s \cdot f \cdot h \Rightarrow f \mid s \cdot f \cdot h + t \cdot g \cdot h = h$
(2) $\Rightarrow$ (1) : Angenommen $f = g \cdot h, \quad g, h \in K[x]$
Zu zeigen: $Grad(g) = 0$ oder $Grad(h) = 0$
$f = g \cdot h$, also auch $f \mid g \cdot h$
Nach (2): $f \mid g$ oder $f \mid h$.
O.B.d.A. $f \mid g$. Dann $Grad(f) \geq (Grad(g)$.
$f = g \cdot h \Rightarrow Grad(f) = \underbrace{Grad(g)}_{\geq Grad(f)} + Grad(h)$
$Grad(g) = Grad(f), \quad Grad(h) = 0$ □

**1.38 Korollar** *K ein Körper, $f \in K[x], Grad(f) = n \geq 1$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.*
*Sind $a_1, \ldots, a_k$ die Nullstellen von f, so :*

$$f = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \ldots \cdot (x - a_k) \cdot \tilde{f}, Grad(f) = Grad(\tilde{f}) - k.$$

*Insbesondere: Ist $k = n$ und f normiert, so ist $f = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ Im Allgemeinen ist $k = n$ und $f = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0, \quad b_n \neq 0$.*
*$f = b_n \cdot (x - a_n) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$*

**Beweis** Induktion nach $n$ : $\quad n = 1$ : $\quad f = ax + b, a \neq 0$.
Genau eine Nullstelle: $-a^{-1} \cdot b$
$n > 1$, Behauptung gelte für $n - 1$. Wenn f keine Nullstelle hat, so fertig.
f habe aber Nullstelle $a \in K$. 1.26: $f = (x - a) \cdot g, Grad(g) = n - 1$
Angenommen f hat weitere Nullstelle $b, b \neq a$. $\quad$ 1.26 $(x - b) \mid f = \underbrace{(x - a)}_{irr.} \cdot g$
1.37: $x - b \mid x - a$ oder $x - b \mid g \quad x - b \nmid x - a$, da $b \neq a$.
Also $x - b \mid g$, das heißt b ist Nullstelle von g.
Induktion: g hat höchstens $n - 1$ Nullstellen.
$\Rightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen. □

**1.39 Satz**
*Sei K Körper, $f = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \quad b_n \neq 0, Grad(f) = n \geq 1$.*
*Dann existieren eindeutig bestimmte irreduzible normierte Polynome $p_1, \ldots, p_l$ und $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ mit*

$$f = b_n \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{m_l}$$

**1.40 Bemerkung** $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}, \oplus, \odot)$
n Primzahl: Körper.
$(K[x], +, \cdot) \to n \in \mathbb{N}, f \in K[x], Grad(f) = n,$
$K[x]_n = g \in K[x] : Grad(g) < n$
$+$ : normale Addition von Polynomen.
$\odot_f : g, h \in K[x]_n$
$g \odot_f h = g \cdot h \bmod f \in K[x]_n$
kommutativer Ring mit Eins.
$(K[x]_n, +, \odot_f)$ Körper $\Leftrightarrow f$ irreduzibel
$K = \mathbb{Z}_p$ $\quad f$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_p[x]$ vom Grad $n$
$\mathbb{Z}_p[x]_n \quad \underbrace{b_{n-1}}_{p} x^{n-1} + \underbrace{b_{n-2}}_{p} x^{n-2} + \dots + \underbrace{b_0}_{p}$
Man kann zeigen:(p Primzahl)
In $\mathbb{Z}_p[x]$ existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n.
Zu jedem n existiert ein Körper mit $p^n$ Elementen.

# §2 Die Körper in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$
Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{R}$.
$x \leq y, x < y$ das heißt $x \leq y$ und $x \neq y$
$x \geq y, x > y$

### 2.1 Grundregeln der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

(1) $\mathbb{R}$ ist total geordnet bezüglich $\leq$.
(Reflexiv: $x \leq x \forall x \in \mathbb{R}$
Antisymm.: $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
Transitivität: $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ oder $y \leq x$

(2) $x, y, a \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow a + x \leq a + y$ „Translationsinvarianz“

(3) $x, y, a \in \mathbb{R}, a \geq 0,\ x \leq y \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$ „Dehnungsinvarianz“

(4) $0 < x < y$, so existiert $n \in N$ mit $n \cdot x > y$. „Archimedisches Axiom“

Es gilt auch:
(2)’ $x < y \Rightarrow a + x < a + y$
(3)’ $a > 0, x < y \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

**2.2 Satz**
*a.)* $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -y$

*b.)* $x \leq y, a \leq 0 \Leftrightarrow ax \geq ay$

*c.)* $x, y \geq 0 (x, y > 0) \Rightarrow x + y, x \cdot y \geq 0 \quad (> 0)$
$x \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \leq 0 \quad (>, < \Rightarrow <)$
$x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0, x + y \leq 0 \quad (<, <, \Rightarrow >)$
*Insbesondere :* $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

*d.)* $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{y}=y^{-1}}$

*e.)* *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} mit \frac{1}{n} < x$

*f.)* *Ist* $x^n < y^n$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x, y \geq 0,$ *so* $x < y$

**Beweis** b.) $a \leq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a.)} -a \geq -0 = 0$
$x \leq y \underbrace{\Rightarrow}_{(3)} -a \cdot x = (-a) \cdot x \leq (-a)y = -ay \underbrace{\Rightarrow}_{a.)} ax \geq ay.$
e.) Ist $x \geq 1,$ so wähle $n = 2, \frac{1}{2} \leq 1 \leq x$
Sei $0 < x < 1,$ $\quad (4) : \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > 1$ Es folgt: $x > \frac{1}{n}$ (WHK, Satz 5.1) $\square$

**2.3 Definition (Intervall)** $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$
$[a, b] = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$ „abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b
$]a, b[:= x \in \mathbb{R} : a < x < b$ „offenes Intervall (Üblich auch: (a,b)
(]a,a[ = „Durchschnitt) $]a, b] := x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$: „halboffenes Intervall“
Schreibweise:
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, ]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, ]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, ]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

## 2.4 Beispiele

a.) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $2x + 4 \leq -3x + 5$
$2x + 4 \leq -3x + 5 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} 5x + 4 \leq 5 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} 5x \leq 1 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x \leq \frac{1}{5} \quad \mathbb{L} =]-\infty, \frac{1}{5}]$

b.) Bestimme alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 2\}$ mit $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$
1. Fall: Angenommen $x + 3 < 0,$ das heißt $x < -3,$ Dann auch $x - 2 < -3 - 2 = -5 < 0$
2.2(b): $\frac{x+3}{x-2} \geq 2 \qquad 2.2(b) : x + 3 \leq 2(x - 2) = 2x - 4 \quad 7 \leq x$
In diesem Fall gibt es keine Lösungen 2. Fall: $x + 3 > 0$ und $x - 2 < 0$
$x > -3 \quad x < 2$
$x + 3 \geq 2(x - 2) = 2x - 4, x \leq 7 \quad \mathbb{L} =]-3, 2[$
3. Fall: $x + 3 > 0, x - 2 > 0,$ das heißt $x > 2$
Wie im 1. Fall: $x \geq 7$ ✓
c.) Bestimme alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ mit $-3x + 2 < 1$ und $\frac{1}{x} + 2 \geq 3$
$-3x + 2 < 1 \Leftrightarrow -3x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$
$x > \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{x} + 2 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq x \quad \mathbb{L} =]\frac{1}{3}, 1]$

**2.5 Satz (Bernoulli’sche Ungleichung)**
*(Jakob Bernoulli, 1657-1704, Basel)*
$\forall n \in \mathbb{N}$ *und jedes* $t \in \mathbb{R}$ *mit* $t > -1$ *ist*

$$(1 + t)^n \geq 1 + n \cdot t$$

**Beweis** Sei $t > -1$: Beweis durch Induktion nach n.
$n = 1 : 1 + t > 1 + t$✓

$n \mapsto n+1 = (1+t)^{n+1} = (1+t)^n \cdot \underbrace{(1+t)}_{\geq 0} \geq \underbrace{(1+nt)}_{2.1(3) \text{ Ind. Vor.}} (1+t) =$

$1 + (n+1)t + \underbrace{nt^2}_{\substack{\geq 0 \\ t^2 \geq 0, 2.2b}} \geq 1 + (n+1)t \checkmark$ □

**2.6 Satz**

*Sei $0 < q < 1$ Dann existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}, x > 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < q^n < x$*
*Beispiel: $x = \frac{1}{1000}, q = \frac{1}{2}$*

**Beweis** Schreibe $1 = q + s, s > 0 \quad sx > 0$
Nach 2.2e.) $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n+1} < sx$, das heißt $\frac{1}{(n+1) \cdot s} < x$
$1 = 1^{n+1} \underset{\text{Bin. Formel}}{=} (q+s)^{n+1} = q^{n+1} + (n+1)s \cdot q^n + \ldots + s^{n+1} > (n+1) \cdot s \cdot q^n$
$\underline{q^n} < \frac{1}{(n+1)} \cdot s < \underline{x}$ □

**2.7 Definition** $a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ Absolutbetrag Abstand zwiscchen $a, b \in \mathbb{R} : d(a,b) = |a-b|$

**2.8 Satz (Eigenschaften des Absolutbetrages)**

1. $-|a| \leq a \leq |a|, |a| = |-a|, \left|a^2\right| = a^2$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *Dreiecksungleichung*
5. $||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$

**Beweis** 4.) $|a+b|^2 \underset{=}{1.)} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + |2ab| + |b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$
$|a+b| \geq 0, \quad |a| + |b| \geq 0$
2.2 f: $|a+b| \leq |a| + |b|$ e.) $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$
$|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$
$\Rightarrow |b| - |a| \leq |a-b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a-b|$ □

**2.9 Beispiel** Bestimme alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\} mit \frac{1}{x-2} \geq 5$
$\frac{1}{x-2} \geq 5 \Leftrightarrow 1 \geq 5 \cdot |x-2|$
1. Fall: $x - 2 \geq 0$, das heißt $x \geq 2$.
$1 \geq 5(x-2) = 5x - 10, 11 \geq 5x, x \leq \frac{11}{5}$ 2. Fall: $x - 2 \leq 0$, das heißt $x \leq 2$ $|x-2| = 2 - x$
$1 \geq 5(2-x) = 10 - 5x, 5x \geq 9, x \geq \frac{9}{5}$
$\mathbb{L} = [\frac{9}{5}, \frac{11}{5}] \backslash \{2\} = [\frac{9}{5}, 2[ \cup ]2, \frac{11}{5}]$

**2.10 Satz**

*Sei $p$ eine Primzahl. Dann ist $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$*

**Beweis** Angenommen $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$
Dann $\sqrt{p} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, ggT(m,n) = 1$
$p = \frac{m^2}{n^2}, \quad n^2 \cdot p = m^2, \quad$ das heißt $p \mid m^2$. Daher $p \mid m$.

Dann auch $p^2 \mid m^2 \quad n^2 \cdot p = m^2, \quad p^2 \mid n^2 \cdot p$
$p^2 \cdot k = n^2 \cdot p, k \in \mathbb{N}$
$p \cdot k = n^2, p \mid n^2$
Dann: $p \mid n$
Widerspruch zu ggT(m,n) = 1. Also: $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ □

**2.11 Definition** $\sqrt{p}$ ist Nullstelle des Polynoms: $x^2 - p \in \mathbb{Q}[x]$
Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen **irrational**. Relle Zahlen, die Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{Q}[x]$ sind, heißen **algebraisch**.
(Rationale Zahlen sind demnach immer algebraisch:
$q \in \mathbb{Q}: \; x - q \in \mathbb{Q}[x]$, Nullstelle $q$; $p$ Primzahl: $\sqrt{p}$ algebraisch, aber nicht rational.)
Relle Zahlen, die nicht algebraisch sind, das heißt die keine Nullstelle innerhalb der reellen Zahlen haben, heißen **transzendent** (z.B. $\pi$)

$\sqrt{2}$ lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren:
$a := 0, \quad b := 2$
***while*** $(b - a \geq \frac{1}{2^{100}})$ ***do***
  $c := \frac{a+b}{2}$; $\quad \frac{a+b}{2}$ ist der Mittelpunkt von [a,b]
  ***if*** $(c^2 < 2)$ ***then*** $a := c$; ***else*** $b := c$; ***fi***,
***od***
Ausgabe: a, Statt $\frac{1}{2^{100}}$ kann man jede andere Fehlerschranke wählen.
$\left|a - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^{100}} \quad \left|b - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^{100}}$
**Allgemeines Prinzip des Bisektionsverfahrens:**
B(x,y) Boolesches Prädikat:
also Funktion, die abhängig von den Werten $x, y \in \mathbb{R}$ Wert 1 (true) oder Wert 0 (false) ausgibt.
$((\frac{x+y}{2})^2 < 2)$

**2.12 Definition** $a_0 < b_0, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R} \quad B(.,.)$ boolesches Prädikat
Dann heißt der (unendliche) Algorithmus: $a := a_0; b := b_0$;
***while*** (true) ***do*** (Die Schleife wird nie abgebrochen)
  $c := \frac{a+b}{2}$;
  ***if*** $B(a, b) = 1$ ***then*** $a := c$, ***else*** $b := c$, ***fi***;
***od*** heißt **Bisektionsverfahren** (**Intervallhalbierungsverfahren**)
Seien die Intervallgrenzen nach dem n-ten Durchlauf der while-Schleife $a_n, b_n$:
$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq \underset{\overrightarrow{a_n}}{a_n} < \underset{\overleftarrow{b_n}}{b_n} \leq b_{n-1} \leq b_{n-2} \leq \ldots \leq b_0$
$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$

**2.13 Axiom (Vollständigkeitsaxiom)**
Durch jedes Bisektionsverfahren wird eindeutig eine reelle Zahl x bestimmt.
$(a_n \leq x \leq b_n, \quad |x - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}, |x - b_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n})$

**Beispiel** Bisektionsverfahren für $\sqrt{2}$

$$B(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\frac{a+b}{2})^2 < 2 \\ 0, & \text{falls } (\frac{a+b}{2})^2 \geq 2 \end{cases}$$

Sei x die Zahl die durch Bisektionsverfahren (für $\sqrt{2}$) bestimmt wird. Es ist $x = \sqrt{2}$
$a_n \leq x \leq b_n \qquad a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2$ (nach Konstruktion von B(a,b))
$x^2 - 2 \leq x^2 - a_n^2 \leq b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq 4(b_n - a_n) = 4 \cdot \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}}$
Gilt : $x^2 - 2 \leq \frac{1}{2^n} \forall n \qquad 2 - x^2 \leq \frac{1}{2^n} \forall n$
$\left|x^2 - 2\right| \leq \frac{1}{2^n} \forall n$
Wäre $\left|x^2 - 2\right| > 0$, so ex. nach 2.6 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^m}_{=\frac{1}{2^m}} < \left|x^2 - 2\right|$

D.h. $\left|x^2 - 2\right| = 0, \quad x^2 - 2, \quad x = \sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ ist total geordneter Körper, archimedisch und das Vollständigkeitsaxiom gilt.
Bisektionsverfahren $\Rightarrow$ Binärdarstellung für jede reelle Zahl (Binärentwicklung)
$\pm \underbrace{y_m y_{m-1} \ldots y_1}_{\text{ganzzahliger Anteil}}, \underbrace{x_0 x_1 x_2}\ldots\ldots$
Genügt : Wie bestimmt man Binärdarstellung von $x \in [0, 1[$? $x_i \in \{0, 1\}$
das bedeutet:
$x = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{4} + x_3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$ (Unendliche Reihe)
$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ (Binärdarstellung) $\sqrt{2} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{a_1} + 0 \cdot \frac{1}{2}}_{a_2} + 1 \cdot \frac{1}{4}}_{a_3} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} +$
$0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{1}{128} + 0 \cdot \frac{1}{256} + 0 \cdot \frac{1}{1024} + 0 \cdot \frac{1}{2048} + \ldots$

### 2.14 Binärdarstellung von $x \in [0, 1]$

Bisektionsverfahren zur Bestimmung von $x \quad a = 0, b = 1$ zu Beginn
Teste in jedem Schritt: $\frac{a+b}{2} < x$
$a_0 = 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_0 = 1$
$a_n = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{2^n}, \quad x_i \in \{0, 1\}$.
$x_i = 1 \Leftrightarrow a_i > a_{i-1}$,
(das heißt $a_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$;
dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{a_{i-1} + b_{i-2}}{2} < x$)
$x - a_n \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$, die $a_n$
nähern sich x beliebig nahe an, im „Grenzwert" erhält man x.
$x = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{2^n} \ldots$

### 2.15 Beispiel

$\sqrt{2} = 1,01101010000\ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots$

### 2.16 Bemerkung

a.) Binärdarstellung ist nicht immer eindeutig:
$\frac{1}{2} = 0,100\ldots$
$\frac{1}{2} = 0,011111\ldots$

b.) Die Binärdarstellung von $x \in \mathbb{Q}$ wird ab irgendeiner Stelle periodisch.
Für irrationale Zahlen gilt dies nicht.

c.) Dezimaldarstellung:
Teile Intervall jeweils in 10 gleiche Teile. Teste, in welchem der 10 Intervall die Zahl x liegt.

**2.17 Korollar** *a.) Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| \leq \frac{1}{2^n}$.*

*b.) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl (sogar unendlich viele).*

*c.) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl (sogar unendlich viele).*
*Insbesondere zu reellen Zahlen gibt es keine nächstgrößere reelle Zahl.*

**Beweis** a.) $r = z + x, z \in \mathbb{Z}, x \in [0, 1[$,
Bilde zu x wie in 2.14 $\quad a_n = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{2^n}, \quad x_i \in \{0, 1\}$.
Setze: $q = z + a_n \in \mathbb{Q}$, wobei $z$, $a_n$ beide $\in \mathbb{Q}$
$|r - q| = |q - r| = |a_n - x| \leq |a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}$

b.) 2.6 $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < r_2 - r_1$
mit a.) $\exists q \in \mathbb{Q} : |r_1 - q| \leq \frac{1}{2^n}$
Ist $q \geq r_1$ , so fertig. Ist $q < r_1$,so ersetze q durch $q + \frac{1}{2^n} \in \mathbb{Q}$ □

**2.18 Definition** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$

a.) M heißt **nach oben beschränkt**, falls es $d \in \mathbb{R}$ gibt mit: $d \geq m \ \forall m \in M$
d heißt dann **obere Schranke** von M. (Gibt es eine, so unendlich viele.)
d heißt **obere Grenze** oder **Supremum** von M , $sup(M)$, wenn d eine obere Schranke von M ist und außerdem $d \leq d'$ für jede obere Schranke d' von M. (obere Grenze = kleinste obere Schranke)

b.) M heißt **nach unten beschränkt**, falls $\exists e \in \mathbb{R}$ mit $e \leq m : \forall m \in M$
e heißt **untere Schranke** von M
e heißt **untere Grenze** oder **Infimum** von M , $inf(M)$, wenn e eine untere Schranke von M ist und außerdem $e \geq e' \forall$ unteren Schranken e' von M gilt.

c.) M heißt beschränkt , wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist

d.) Ist $sup(M) \in M$, so $max(M) := sup(M)$,
Ist $inf(M) \in M$, so $min(M) := inf(M)$,

**2.19 Beispiel**

a.) $M = ]0, 1[$ beschränkt:
Jede Zahl $\geq 1$ ist obere Schranke
Jede Zahl $\leq 0$ ist untere Schranke
$inf(M) = 0 \notin M$
$sup(M) = 1 \notin M$
$max(M), min(M)$ gibt es nicht!

b.) $M = [0, 1]$
$inf(M) = 0 = min(M)$
$sup(M) = 1 = max(M)$

c.) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
M nach oben und nach unten beschränkt.
$sup(M) = max(M) = 1$
Wenn $\epsilon > 0$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$ nach 2.6
Das heißt $\epsilon$ ist keine untere Schranke von M.
$inf(M) = 0 \quad min(M)$ existiert nicht

d.) $M = \{\frac{m+n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
Weil alle $1 + n$ in M liegen, $n \in \mathbb{N}(m = 1)$, gibt es keine obere Schranke. Das heißt M ist nicht nach oben beschränkt
M ist nach unten beschränkt, denn $0 < \frac{m+n}{m} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
$\frac{m+n}{m} = 1 + \frac{n}{m} > 1 \quad 1$ untere Schranke von $M$
Angenommen $1 + \epsilon$ wäre untere Schranke von M mit $\epsilon > 0$.
Es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \epsilon$
Dann $\underbrace{1 + \frac{1}{m}}_{\in M(n=1)} < 1 + \epsilon \Rightarrow \quad$ Widerspruch
Also $inf(M) = 1$
$min(M)$ existiert nicht, da $1 \notin M$

**2.20 Satz**
*Für jede nach* $\begin{cases} oben \\ unten \end{cases}$ *beschränkte Menge reeller Zahlen existiert* $\begin{cases} Supremum \\ Infimum \end{cases}$.

**Beweis** mit Bisektionsverfahren, siehe WHK oder Internet □

**2.21 Beispiel**
$M = \{x : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$
Bisektionsverfahren aus 2.20 auf M anwenden.
$sup(M) = \sqrt{2}$. (Dasselbe Bisektionsverfahren wie zur Bestimmung von $\sqrt{2}$).
Allgemein: Sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, a > 0$
$M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \ x^n \leq a\}$
$sup(M) = \sqrt[n]{a}$ (Existenz n-ter Wurzeln aus positiver Zahl)
$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \ x^n \geq a\}$
$inf(\tilde{M}) = \sqrt[n]{a}$

**Beispiel** Nach 1.40: K Körper, f irreduzibles Polynom in K[x] vom Grad n.
$K[x]_n = \{g : g \in K[x], Grad(g) < n\}$
+ repräsentiert hier die normale Addition von Polynomen!
$\odot_f : g, h \in K[x]_n : g \odot_f h := g \cdot h \bmod f \in K[x]_n$
$(K[x]_n, +, \odot_f)$ ist Körper
$K = \mathbb{R}, f = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, also ist es irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
$\mathbb{R}[x]_2 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$
$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x$
$(a + bx) \odot_f (c + dx) = (a + bx) \cdot (c + dx) \bmod (x^2 + 1)$
$= a \cdot c + (ad + bc)x + bdx^2 \bmod (x^2 + 1)$
$= ac + (ad + bc)x - bd$
$= (ac - bd) + (ad + bc)x$

Statt $\odot_f$ schreibt man $\cdot$, statt x schreibt man i.
d.h. $(a + bi) \cdot (c + di)$

### 2.22 Satz und Definition

a.) $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein Körper bezüglich + und $\cdot$, definiert durch:
$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

Schreibweise:

$a + 0 \cdot i = a$
$0 + b \cdot i = bi$
$i \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i$
$i^2 = (0 + 1 \cdot i) \cdot (0 + 1 \cdot i) = -1$
Multiplikation: Multipliziere distributiv aus und benutze $i^2 = -1$:
$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2$
$(ac - bd) + (ad + bc)i$

b.) $\mathbb{R} = \{a + 0 \cdot i : a \in \mathbb{R}\}$ Teilkörper von $\mathbb{C}$

c.) Ist $a + bi \neq 0 \;\; (0 = 0 + 0 \cdot i)$, so ist
$\frac{1}{a+bi} = (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$

**Beweis** Ringeigenschaften aus allgemeinen Gründen ( oder nachrechnen)
c.) $(a + bi) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i) = (\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + (-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \cdot i = 1$ □

**Beispiel** a.) $i \cdot (3 - 4i) = 3i - 4i^2 = 4 + 3i$

b.) $(2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9 = \underline{13}$

c.) $(2 - 3i)^{-1} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$

d.) $\sqrt{-2} = \pm \sqrt{2} \cdot i$

**2.23 Definition** $z := a + bi \in \mathbb{C}$
a heißt **Realteil** von z $\quad (R(z), Re(z))$
b heißt **Imaginärteil** von z $\quad (I(z), Im(z))$
i heißt **imaginäre Einheit**
$z = a + bi, \quad \overline{z} := a - bi$ zu z konjugiert komplexe Zahl
$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

### 2.24 Geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad a + bi \Leftrightarrow (a, b)$

Multiplikation von a+bi mit $c \in \mathbb{R} : c \cdot (a + bi) = ac + bci$
Streckung oder Stauchung um den Faktor c.

Multiplikation von a+bi mit i:
$i(a + bi) = -b + ai$
Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn.

Komplex Konjugiert (Spiegelung an der Real-Achse):

**2.25 Satz**
$Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$

*a.)* $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*b.)* $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
*Bei beiden handelt es sich um Körperhomomorphismen von $z \Rightarrow \overline{z}$*

*c.)* $\overline{(\overline{z})}(= \overline{\overline{z}}) = z \qquad z \Rightarrow \overline{z}$ *Körperisomorphismus von $\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$*

*d.)* $z \cdot \overline{z} = \mathbb{R}(z)^2 + I(z)^2 \in \mathbb{R}$
$(z^{-1} = \frac{1}{R(z)^2 + I(z)^2} \cdot \overline{z})$

**2.26 Definition** Absolutbetrag von $z \in \mathbb{C} : |z| = +\sqrt{R(z)^2 + I(z)^2} = +\sqrt{z\overline{z}}$
$z \in \mathbb{R} \qquad (z) = \mathbb{R}(z)$
$|z| = u\sqrt{z^2}$ üblicher Betrag.
$|R(z)|, |I(z)| \leq |z|$
Abstand: $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$

Alle Zahlen mit gleichem Betrag d entsprechen den Punkten auf dem Kreis um (0,0) mit Radius d.

**Beispiel:**

$z = |z|\,(cos(\varphi) + sin(\varphi) \cdot i)$
$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,(cos(\varphi_1) + sin(\varphi_1) \cdot i) \cdot |z_2| \cdot (cos(\varphi_2) + sin(\varphi_2) \cdot i)$
$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\underbrace{(cos(\varphi_1) \cdot cos(\varphi_2) - sin(\varphi_1) \cdot sin(\varphi_2))}_{cos(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\underbrace{+}_{\Rightarrow Additionstheoreme \Leftarrow} \underbrace{(cos(\varphi_1)sin(\varphi_2) + sin(\varphi_1)cos(\varphi_2)) \cdot i)}_{sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$= |z_1 \cdot z_2|\,(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + sin(\varphi_1 + \varphi_2)i)$

**2.27 Satz**
$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

*a.)* $|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *(Definitheit)*

*b.)* $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *(Multiplikativität)* *c.)* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

*d.)* $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**2.28 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**
*$f \in \mathbb{C}[x], Grad(f) = n \geq 1$ Dann hat $f$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*
*Insbesondere: $f = a_n(x - c_1) \dots \cdot (x - c_n)$*
*wobei $a_n$ höchster Koeffizient $\neq 0$ von $f, c_1 \dots c_n$ Nullstellen von $f$ (nicht notwendig verschieden).*

Man kann zwei komplexe Zahlen lexikographisch ordnen.
Auf $\mathbb{C}$ gibt es <u>keine</u> totale Ordnung $\leq$ mit:
$a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
$a \leq b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

# §3 Folgen und Reihen

**3.1 Definition** $k \in \mathbb{Z}$ (Anfangsindex) , $A_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$
Abbildung $u : \begin{cases} A_k & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u_n \end{cases}$ heißt eine bei $k$ beginnende Folge reeller Zahlen
Schreibweise $(u_n)_{n \geq k} = (u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots), (u_n)$
$u_n$ ist n-tes Folgenglied, n ist der Index.

**3.2 Beispiel** $k = 1$

a.) $u_n = 5 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (5, 5, 5, 5, \dots)$

b.) $u_n = n \quad (1, 2, 3, 4, \dots)$

c.) $u_n = \frac{1}{n} \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

d.) $u_n = \frac{(n+1)^2}{2^n} \quad (2, \frac{9}{4}, 2, \frac{25}{16}, \dots)$

e.) $u_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+2} \quad (1, \frac{13}{8}, \dots)$

f.) $u_n = (-1)^n \quad (1, -1, 1, -1 \dots)$

g.) $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}},\ u_1 = 1,\ u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ (rekursiv definierte Folge)

h.) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \qquad n \geq 1$
$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$
$u_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{i}$
$u_1 = -1,\ u_2 = -\frac{1}{2},\ u_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6} \dots$

**3.3 Definition** Eine Folge $(u_n)_{n \geq k}$ heißt **beschränkt**, wenn eine Zahl

$$d \geq 0 \text{ existiert mit } |u_n| \leq d \;\; \forall n \geq k$$

Das heißt: $-d \leq u_n \leq d \;\forall n \geq k$

**3.4 Definition** Eine Folge $(u_n)_n \geq k$ **konvergiert** gegen $c \in \mathbb{R}$ falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| < \varepsilon$$

Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ existiert ein gegebenenfalls von $\varepsilon$ abhängiger Index $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|u_n - c| < \varepsilon\ \forall n \geq n(\varepsilon)$$

das heißt $c - \varepsilon < u_n < c + \varepsilon\ \forall n \geq n(\varepsilon)$

$c = \lim_{n\to\infty} u_n$ **Grenzwert** der Folge $u_n$
Grenzwert hängt nicht von Anfangsgliedern einer Folge ab.

### 3.5 Beispiel

a.) $u_n = n \quad (u_n)$ ist nicht beschränkt, nicht konvergent.

b.) $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
$(u_n)$ ist beschränkt $: u_n = |u_n| \leq 1$
$(u_n)$ ist konvergent $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$c = 0$ zu zeigen $: \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon)$
$\frac{1}{n} = u_n = |u_n| = |u_n - 0| < \varepsilon$
Archimedisches Axiom: $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
$\forall n \geq n(\varepsilon) : n > \frac{1}{\varepsilon}$, das heißt $\varepsilon > \frac{1}{n}, \frac{1}{n} < \varepsilon$

c.) $u_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+2}$ konvergiert gegen 3.
$u_n = \frac{3n^2+3n+6-3n-5}{n^2+n+2} = 3 - \frac{3n+5}{n^2+n+2}$
$|u_n - 3| = \frac{3n+5}{n^2+n+2}$
Zeige: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n \geq n(\varepsilon) : \frac{3n+5}{n^2+n+2} < \varepsilon$
$\frac{3n+5}{n^2+n+2} \leq \frac{3n+n}{n^2} = \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}\ \forall n \geq 5$
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n(\varepsilon)$ so, dass $n(\varepsilon) > \frac{4}{\varepsilon}$ Archimedisches Axiom
Dann für alle $n > n(\varepsilon) : n > \frac{4}{\varepsilon}$, das heißt $\varepsilon > \frac{4}{n}$
$\frac{3n+5}{n^2+n+2} \leq \frac{4}{n} < \varepsilon$
$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+n+2} = 3$

d.) $u_n = (-1)^n \qquad |u_n| \leq 1 \forall n$
$(u_n)$ ist beschränkt.
$(u_n)$ konvergiert nicht.
Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:
$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| \geq \varepsilon$
$c \in \mathbb{R}$: Zeige dass c kein Grenzwert für $(u_n)$ ist.
$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Angenommen es existiert ein $n_0 = n\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n(\frac{1}{2}) :$
$|u_n - c| < \frac{1}{2}$
$\left|u_{n_0} - c\right| < \frac{1}{2}$
$\left|u_{n_0+1} - c\right| < \frac{1}{2}$
Dann: $\left|u_{n_0} - u_{n_0+1}\right| = \left|u_{n_0} - c + c - u_{n_0+1}\right| \leq \left|u_{n_0} - c\right| + \left|c - u_{n_0+1}\right|$
$= \left|u_{n_0} - c\right| + \left|u_{n_0+1} - c\right| < 1$, Widerspruch.

**3.6 Satz**
*a.) Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

*b.) Sind $u = (u_n)_{n\geq k}$ und $v = (v_n)_{n\geq k}$ beschränkt, so auch:*
*Die **Summe** von u+v: $(u_n + u_v)_{n\geq k}$*
*Das **Produkt** $u \cdot v : (u_n \cdot u_v)_{n\geq k}$ und*
*die **Absolutbetragfolge** $|u| := (|u_n|)_{n\geq k}$*

**Beweis** a.) $\lim_{n\to\infty} u_n = c$
Wähle $\varepsilon = 1$. Dann existiert $n(1) \in \mathbb{N}$, so dass $|u_n - c| < 1 \ \forall n \geq n(1)$
das heißt $c - 1 < u_n < c + 1 \forall n \geq n(1)$
$|u_n| = |u_n - c + c| \leq |u_n - c| + |c| < 1 + |c| \ \forall n \geq n(1)$
$M = max\{|u_1|, \ldots, \left|u_{n(1)-1}\right|\}$
$|u_n| < \underbrace{1 + |c| + M}_{d} \forall n$

b.) Folgt aus Rechenregeln für Absolutbetrag. □

**3.7 Definition** $u = (u_n)_{n\geq k}$ Folge

a.) u heißt **monoton wachsend (steigend)**, wenn

$$u_n \leq u_{n+1} \forall n \geq k$$

u heißt **streng monoton wachsend**, wenn

$$u_n < u_{n+1} \forall n \geq k$$

b.) u heißt **monoton fallend**, wenn

$$u_n \geq u_{n+1} \forall n \geq k$$

u heißt **streng monoton fallend**, wenn

$$u_n > u_{n+1} \forall n \geq k$$

## 3.8 Beispiel

a.) $u_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend

b.) $u_n = \sqrt{n}$ streng monoton wachsend

c.) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ streng monoton wachsend

d.) $u_n = (-1)^n$ nicht monoton wachsend, nicht monoton fallend.

**3.9 Satz**
*Ist $(u_n)_{n\geq k}$ monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert $(u_n)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = sup\{u_n : n \geq k\}$$

*Ist $(u_n)_{n\geq k}$ monoton fallend und beschränkt, so konvergiert $(u_n)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = inf\{u_n : n \geq k\}$$

**Beweis** Sei $(u_n)_{n\geq k}$ monoton wachsend.
$\{u_n : n \geq k\}$ ist beschränkt. Dann existiert ein $c = sup\{u_n : n \geq k\}$ nach (2.20)
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $n(\varepsilon)$ mit

$$c - \varepsilon < u_{n(\varepsilon)} \leq c$$

nach Definition von Supremum.

$$\forall n \geq n(\varepsilon) : |c - u_n| \underset{u_n \leq c}{=} c - u_n \underset{u_n \geq u_{n(\varepsilon)}}{\leq} c - u_{n(\varepsilon)} < \varepsilon$$

2. Teil: analog. □

### 3.10 Beipiel

$q \in \mathbb{R}, 0 \leq q < 1$
$u_n = q^n \qquad u_n \geq 0 \quad u_n$ ist monton fallend
$q < 1 \Rightarrow q^{n+1} \leq q^n$
$0 \leq u_n \leq 1 \forall n$
$inf\{q^n : n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad (2.6)$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
$q = 1 : \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1.$
$q > 1 : \lim\limits_{n\to\infty} q^n$ ist nicht beschränkt, also auch nicht konvergent.

**3.11 Definition** Eine Folge $(u_n)$ heißt **Nullfolge** falls

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

### 3.12 Satz

*Seien $(u_n)_{n\geq k}$, $(v_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten c bzw. d. Dann gilt*

*a.)* $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |c|$

*b.)* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = c + d$

*c.)* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = c \cdot d$

*d.) Ist $v_n \neq 0 \; \forall n \geq k$ und ist $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = d \neq 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{c}{d}$*

*e.) Ist $(v_n)$ Nullfolge, so konv. $\frac{1}{v_n}$ nicht*

*f.) Existiert $m \geq k$ mit $u_n \leq v_n \; \forall n \geq m$, dann ist $c \leq d$*
*(Beachte: Es kann passieren, dass $u_n < v_n \; \forall n$, aber $c = d$)*
*Bsp.: $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = \frac{1}{n}$*

*g.) Existiert $m \geq k$ mit $0 \leq u_n \leq v_n \; \forall n \geq m$ und ist $(v_n)$ Nullfolge, so ist $(u_n)$ Nullfolge.*
*$(x - a_n)$ Nullfolge $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$*

**Beweis** a,d-g siehe Buch und ÜA

b.) $|(u_n + v_n) - (c + d)| = |u_n - c + v_n - d| \leq |u_n - c| + |v_n - d|$
Sei $\varepsilon > 0$. Ex. $u_1$ mit $|u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq n_1$,
ex. $n_2$ mit $(v_n - d) < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq n_2$
$n(\varepsilon) = max(n_1, n_2)$; $|(u_n + v_n) - (c + d)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; \forall n \geq n(\varepsilon)$

c.) $|u_n \cdot v_n - c \cdot d| = |u_n \cdot v_n - u_n \cdot d + u_n \cdot d - c \cdot d| \overset{\Delta-ungl.}{\leq} |u_n v_n - u_n d| + |u_n d - cd|$
$= |u_n(v_n - d)| + |d(u_n - c)| = |u_n| \cdot |v_n - d| + |d| \cdot |u_n - c|$
$\leq M\,|v_n - d| + |d| \cdot |u_n - c| \leq M \cdot |v_n - d| + (|d| + 1) \cdot |u_n - c|$
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Ex. $n_1$, sodass $|v_n - d| < \frac{\varepsilon}{2M}$ $\forall n \geq n_1$.
Ex. $n_2$, sodass $|u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2(|d|+1)}$ $\forall n \geq n_2$.
Setze $n(\varepsilon) = max(n_1, n_2)$
Dann gilt $\forall n \geq n(\varepsilon)$ :
$|u_n v_n - cd| \leq M\,|v_n - d| + (|d| + 1) \cdot |u_n - c| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|d| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|d|+1)} = \varepsilon$ □

**3.13 Bemerkung** Bisektionsverfahren, das $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.
$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$
$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$
$a_n \leq x \leq b_n, \;\; 0 \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$
$|x - a_n| = x - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ Nullfolge, da $\frac{1}{2^n}$ Nullfolge und 3.12c)

**3.14 Beispiel**

a.) $m \in \mathbb{N}$. $\left(\frac{1}{n^m}\right)_{n \geq 1}$ Nullfolge, da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ Nullfolge
**Beweis** (3.12c)

b.) Seien $P, Q \in \mathbb{R}[x]$
$P = a_m x^m + \ldots + a_0, \;\; a_n \neq 0 \quad Grad(P) = m \geq 0$
$Q = b_l x^l + \ldots + b_0, \;\; b_n \neq 0 \quad Grad(Q) = l \geq 0$
Sei $Q(n) \neq 0 \; \forall n \geq k$
($k$ geeignet ???. $k$ ex. da $Q$ nur höchstens $l$ Nullstellen hat)
$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = ?$

- Ist $m > l$, so ist die Folge $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n \geq k}$ nicht konvergent
  **Beweis** analog zu $m < l$
- Ist $m = l$, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_m}$
  **Beweis** Bsp. in 3.5c) $lim\left(\frac{3n^2+1}{n^2+n+2}\right) \to 3$
- Ist $m < l$, so ist die Folge $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n \geq k}$ Nullfolge
  **Beweis**
  $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m n^m + \ldots + a_0}{b_l n^l + \ldots + b_0} = \frac{n^m (a_m + a_{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + a_0 \frac{1}{n^m})}{n^l (b_l + b_{l-1} \frac{1}{n} + \ldots + b_0 \frac{1}{n^l})}$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^{l-m}}}_{\to 0} \cdot \frac{\left(\overbrace{a_m + a_{m-1} \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} + \ldots + a_0 \cdot \overbrace{\frac{1}{n^m}}^{\to 0}}^{\to a_m}\right)}{\left(\underbrace{b_l + b_{l-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \ldots + b_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{n^l}}_{\to 0}}_{\to b_l}\right)} \to lim\left(\frac{1}{n^{l-m}}\right) \cdot \frac{a_m}{b_l} = 0$$

c.) $0 \leq q < 1$. $(q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge
$(n \cdot q^n)_{n\geq 1}$ Nullfolge, klar, falls $q = 0$, Sei $q > 0$, $\frac{1}{q} > 1$, $\frac{1}{q} = t + 1$, $t > 0$
$\frac{1}{q^n} = (1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i = 1 + n \cdot t + \frac{n(n-1)}{2} \cdot t^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2} t^2$ für $n \geq 2$
$q^n < \frac{2}{n(n-1)t^2}$, $0 \leq n \cdot q^n < \frac{2}{(n-1) \cdot t^2}$ $\leftarrow$ Nullfolge
3.12g): $(n \cdot q^n)$ Nullfolge

**3.15 Definition** a.) Eine Folge $(u_n)_{n\geq k}$ heißt **strikt positiv**, falls $u_n > 0$ $\forall n \geq k$. Im folgenden sei $u = (u_n)$ strikt positive Folge.

b.) $O(u) = O(u_n) = \left\{ v = (v_n)_{n\geq k} : \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq k} \text{ ist beschränkt} \right\}$
$= \{v = (v_n)_{n\geq k} : \exists c > 0 : |v_n| \leq c \cdot u_n \; \forall n \geq k\}$

c.) $o(u) = o(u_n) = \left\{ v = (v_n)_{n\geq k} : \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq k} \text{ ist Nullfolge} \right\}$
(Bedeutung: $(v_n) \in o(u_n)$, falls $u_n$ deutlich schneller wächst als $v_n$)
Bemerkung: $O, o$ Landausymbole

**Beispiel**
$(n^2) \in o(n^3)$,
$\left(\frac{n^2}{n^3}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow$ Nullfolge
$(n^2 + n + 1) \in O(n^2)$ $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)$ konvergent, also beschränkt
$O(1)$ Menge der beschränkten Folgen
$o(1)$ Menge der Nullfolgen

Nachlässige Schreibweise: statt $v_n \in O(v_n)$ auch $v_n = O(u_n)$, aber keine Gleichheit hier!

**Beispiel** $(u_n)$ strikt positive Folge
$(v_n) \in O(u_n) \Leftrightarrow \exists c > 0 : |v_n| \leq c \cdot u_n \forall n$
$(n^2 + n + 1) \in O(n^2)$ $n^2 + n + 1 \leq 3 \cdot n^2$
$(n^2 + n + 1) \in O(n^3)$ $n^2 + n + 1 \leq 3 \cdot n^3$
Algorithmus:
$t_n =$ maximale Laufzeit bei Input der Länge n
Angenommen $(t_n) \in O(n^2)$
Allgemein $(t_n) \in O(n^k)$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$ so genannte polynomiale Algorithmen
$o(u_n) = \{(v_n) : \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0\}$
$u_n$ wächst deutlich schneller als $v_n$.
$(v_n) \in o(u_n) \Rightarrow (v_n) \in O(u_n)$
$n^2 \in O(n^2)$; $n^2 \notin o(n^2)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$.
$(n^2) \in o(n^3)$ $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \Rightarrow 0$

**3.16 Satz**
*Sei $P \in \mathbb{R}[x], Grad(P) = m \geq 0$*

*a.)* $(P(n)) \in o(n^l)$ *falls $l > m$*
$(P(n)) \in O(n^l)$ *falls $l \geq m$*

*b.) Ist $r > 1$, so ist $(P(n)) \in o(r^n)$*
*Da Exponentialfolgen deutlich schneller wachsen als Polynomfolgen.*

**Beweis**
a.) Folgt aus 3.14 b.)
b.) Es genügt $(n^m) \in o(r^n)$ zu zeigen, (Summen und Vielfache von Nullfolgen sind Nullfolgen)
Setze $q = \sqrt[m]{\frac{1}{r}} < 1 \qquad \frac{n^m}{r^n} = n^m \cdot q^{m \cdot n} = (n \cdot q^n)^m$
3.14 c.) : $(n \cdot q^n)$ ist Nullfolge
$((n \cdot q^n)^m)_n$ ist Nullfolge (3.12c)
$(\frac{n^m}{r^n})$ ist Nullfolge
$(n^m) \in o(r^n)$ $\square$

**3.17 Definition** $(u_n)_{n \geq k}$ Folge, $\{n_j : j \in \mathbb{N}\}, n_j \in \mathbb{Z}, n_j \geq k$
Es gelte:
$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$
$(u_{n_j})_{j \geq 1}$ Teilfolge von $(u_n)$
Beispiel:
$u_n = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad (u_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots)$
Teilfolge: $(u_{2n})_{n \geq 1} = \frac{1}{2n} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots)$
Teilfolge: $(u_{2n-1})_{n \geq 1} = (-\frac{1}{2n-1}) = (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots)$
Teilfolge: $(u_n)_{n \geq 5} = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots)$
Beachte: Jede Teilfolge von konvergenter Folge konvergiert gegen denselben Grenzwert.

**3.18 Satz (Bolzano-Weierstraß)**
*(Bolzano 1781 - 1848, Weierstraß 1815-1897)*
*Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.*

**Beweisidee**
$|u_n| \leq d \ \ \forall n,$ geeignetes $d > 0; -d \leq u_n \leq d$
Bisektionsverfahren:
a:= -d , b: = d;
***while*** (true) ***do***
$c := \frac{a+b}{2};$
***if*** $|\{n : u_n < c\}| = \infty$ ***then*** $b := c$, ***else*** $a := c;$***fi***
***od***

Bisektionsverfahren bestimmt eindeutige Zahl $x \in \mathbb{R}$
$a_l \leq x \leq b_l$, in jedem Intervall liegen unendlich viele Folgenglieder:
Wähle aus: $[a_l, b_l]$ ein $u_{n_l}$ mit $n_l > n_{l-1}$
Liefert Teilfolge $(u_{n_l})$ von $(u_n), a_l \leq u_{n_l} \leq b_l \qquad \lim_{l \to \infty} u_{n_l} = x$

**3.19 Satz (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)**
*(Cauchy, 1789-1857)*
$u = (u_n)_{n \geq k}$ *Dann sind gleichwertig:*
*(1) u ist konvergent*
*(2)* $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall n, m \geq n(\varepsilon) : |u_n - u_m| < \varepsilon$
*(Konvergenz Kriterium benötigt nicht den Grenzwert)*

**Beweis** (1) $\Rightarrow$ (2)
$\lim_{n \to \infty} u_n = c. \qquad \exists n_1 \forall n \geq n_1 : |u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_1 m \geq n_1 : |u_n - u_m| \underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} |u_n - c| + |u_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
(2) $\Rightarrow$ (1) :
(I) $(u_n)$ ist beschränkt
Wende (2) mit $\varepsilon = 1$ an
$\exists n(1) \forall n, m \geq n(1) : |u_n - u_m| < 1$
Das heißt: $\forall n \geq n(1) : |u_n| = |u_n(1) - u_n(1) + u_n| \leq |u_n(1)| + |u_n(1) - u_n| \leq |u_n(1)| + 1$
$m = max\{|u_1|, \ldots, |u_{n(1)-1}|\}$
$|u_n| \leq m + |u_n(1)| + 1 \forall n$
(II) 3.18 $(u_n)$ hat konvergente Teilfolge $(u_{n_l})_{l \geq 1}$
$\lim_{l \to \infty}(u_{n_l}) = c$ Zeige: $\lim_{n \to \infty}(u_n) = c$
Sei $\varepsilon > 0 : \exists \tilde{n} : |u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m \geq \tilde{n}(2)$
$\exists \tilde{l} : |c - u_{n_l}| < \frac{\varepsilon}{2} \forall l \geq \tilde{l}$
Wähle $\tilde{l}$ so groß, dass $n_{\tilde{l}} \geq \tilde{n}$
$|u_n - c| \leq |u_n - u_{n_{\tilde{l}}}| + |u_{n_{\tilde{l}}} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n \geq \tilde{n}$ □

### 3.20 Definition (Reihen)

a.) Sei $(a_i)_{i \geq k}$ Folge, $s_n = \sum_{i=k}^{n} a_i \forall n \geq k$ Partialsummen der Folge
Dann heißt $(s_n)_{n \geq k}$ **unendliche Reihe**
Schreibweise: $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$

b.) Ist die Folge $(s_n)$ konvergent mit $\lim_{n \to \infty} s_n = c$, so schreibt man $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = c$;
Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ ist **konvergent**.
Konvergiert $s_n$ nicht, so heißt die Reihe **divergent**

(Zwei Bedeutungen von $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$:
- Folge der Partialsummen
- Bezeichnung für Grenzwert, falls Reihe konvergiert)

### 3.21 Satz

*a.) (Cauchy-Kriterium für Reihen)*
$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *ist genau dann konvergent, wenn gilt:*
$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \forall m, n \geq n(\varepsilon), m > n \quad \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| < \varepsilon$
*Folgt aus 3.20.*

*b.) (sogenanntes "Trivialkriterium")*
$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergent* $\Rightarrow (a_i)$ *Nullfolge.*
*Folgt aus a.) mit m = n+1*

*c.) Ist die Folge $s_n$ der Partialsummen $s_n = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$ beschränkt und $a_i \geq 0 \forall i \geq k$, so ist* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergent.*
$s_n \geq s_{n+1}$ *Dann 3.9.*

### 3.22 Beispiele

a.) **(Geometrische Reihe)**
Sei $q \in \mathbb{R}$. Ist $q \neq 1$, so ist $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
**Beweisidee**
$(\sum\limits_{i=0}^{n} q^i)(q-1) = (q^0 + q^n + \ldots + q^n)(q-1) = (q^{n+1} - q^0) = q^{n+1} - 1$
Sei jetzt $|q| < 1$, das heißt $-1 < q < 1$
Dann gilt: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ konvergiert , $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$
(Bsp: $q = \frac{1}{2}$ : $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$)
$\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{i=0}^{n} q^i) = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \underbrace{=}_{\lim q^n = 0} \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
Ist $|q| \geq 1$, so divergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$, denn die $(q^i)$ bilden keine Nullfolge

b.) **(Harmonische Reihe)**
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$ ist divergent
$(\frac{1}{i})_{i\geq 1}$ ist Nullfolge, aber
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert nicht. Das heißt Umkehrung von 3.21b.) gilt nicht!
**Beweisidee**
$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ :   $n = 1 = 2^0 : s_1 = 1$
$n = 2 = 2^1 : s_2 = 1 + \frac{1}{2}$
$n = 4 = 2^2 : s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{2}{2}$
$n = 8 = 2^3 : s_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})\underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}_{>\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3}$

$s_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$ (Induktion)
Also: $(s_n)$ ist unbeschränkt, also konvergiert $(s_n)$ nicht,
das heißt $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergent.

c.) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. 3.21c.):
Zeige: Folge der Partialsummen ist beschränkt.(Grenzwert ist $\leq 2$)
$s_n \leq s_{2^n-1} = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{7^2}) + \ldots + (\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^2})$
$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^i \underbrace{=}_{a} 2$
Man kann zeigen Grenzwert: $\frac{\pi^2}{6}$
Mann kann zeigen:
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ konvergiert, falls $s > 1$

d.) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$
konvergiert:

$s_{2n} = \underbrace{(-1+\frac{1}{2})}_{<0} + \underbrace{(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}_{<0} + \ldots + \underbrace{(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})}_{<0}$
$s_{2n} > s_{2n+2} \forall n \Rightarrow (s_2n$ monoton fallend
$s_{2n-1} = -1 + \underbrace{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})}_{>0} + \underbrace{(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})}_{>0} + \ldots + \underbrace{(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1})}_{>0}$
$s_{2n-1} < s_{2n+1} \forall n$ $(s_{2n-1}$ monoton wachsend. 3.22 c.) lässt sich verallgemeinern:

**3.23 Satz (Leibniz-Kriterium)**
*Sei $(a_i)_{i \geq k}$ monoton fallende Nullfolge (inbesondere $a_i \geq 0 \forall i$)*
*Dann ist:*

$$\sum_{i=k}^{\infty} (-1)^i a_i$$

*konvergent.*

**3.24 Satz**
*(Majorantenkriterium)*
*$(a_i)_{i \geq k}, (b_i)_{i \geq k}$ Folgen, wobei $b_i \geq 0 \forall i$*
*und $|a_i| \leq b_i \forall i$*
*Ist $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent, so auch*
*$\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ und auch $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$.*
*Dabei gilt für die Grenzwerte:*

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

**3.25 Beispiel**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert: Es ist $\sqrt{n} \leq n \forall n$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$
Angenommen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert $\underbrace{\Rightarrow}_{3.24} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert, Widerspruch zu 3.22a.)

**3.26 Definition** Eine Reihe $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum\limits_{n=k}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

**3.27 Korollar** *$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent. (3.24: $b_i = |a_i|, a_i 0 a_i$)*
*Beachte: Umkehrung von 3.27 gilt nicht: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $\quad \sum a_n$ konvergiert ( 3.22.d),*
*aber nicht absolut konvergent. $\quad \sum |a_n|$ konvergiert nicht (3.22.b)*

**3.28 Satz**
*$\sum_{i=k^{\infty}} a_i$ eine Reihe:*

*a.) Wurzelkriterium*
*Gilt für die Glieder $a_i$ der Reihe ab gewissem $i_0 \forall i \geq i_0$ stets: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ für festes q, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut.*
*Gilt dagegen $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendliche viele i, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$*

*b.) Quotientenkriterium*

*Gilt für alle $a_i$ ab gewissem $i_0$, das heißt $\forall i \geq i_0$ stets: $\left|\frac{a_i+1}{a_i}\right| \leq q < 1$ für ein festes $q$, so konvergiert die Reihe absolut.*

**Beweis** nur a.): $|a_i| \leq q^i \; \forall i \geq i_0$
$\sum\limits_{i=i_0}^{\infty}$ konvergent, da $0 \leq q < 1$ (3.22.a)
3.24i $\sum |a_i|$ konvergent.
Gibt es Indizes mit $i_1 > i_2 > \dots$
mit $\sqrt[i_k]{\left|a_{i_j}\right|} \geq 1$, $j \in \mathbb{N}$, dann $\left|a_{i_j}\right| \geq 1$
Daher ist $(a_i)$ keine Nullfolge $\Rightarrow \sum a_i$ divergiert. □

**3.29 Bemerkung** $q < 1$ wichtig. Es reicht in 3.28a), 3.28b) <u>nicht</u> nur $\sqrt[i]{|a_i|} \; \forall i \geq i_0 \leq q, \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \; \forall i \geq i_0 \leq q$ zu verlangen.

**3.30 Beispiel**

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ konvergent
$(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \dots \qquad x = 2)$
Quotientenkriterium:
$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \frac{\left|x^{i+1}\right| i!}{(i+1)! \left|x^i\right|} = \frac{|x|}{i+1}$
Wähle $i_0$ so, dass $i_0 + 1 \geq 2\,|x|$
Für alle $i \geq i_0$
$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \frac{|x|}{i+1} \leq \frac{|x|}{i_0+1} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{q} < 1$

**3.31 Satz (Summen von Reihen)**

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i, \sum_{i=k}^{\infty} b_i \text{ konvergieren (absolut) } \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} a_i + b_i \text{ konvergiert (absolut).}$$

**Beweis** Konvergenz folgt aus entsprechendem Satz für Folgen. □

Absolute Konvergenz $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$ (3.24)
Produkte von Reihen:
Möglichkeit: $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i b_i$
Es kann passieren: $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergieren , aber $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i b_i$ konvergiert nicht.

**3.32 Definition** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ Reihen.
Definiere das **Cauchy-Produkt** dieser beiden Reihen durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ , wobei } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

$a_i = \frac{1}{2^i}, b_i = \frac{1}{(i+1)^2}$

$c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1$
$c_1 = a_0 b_1 = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$

**3.33 Satz**
*Sind* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i, \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ *absolut konvergent, so auch das Cauchy Produkt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)$$

*(Produkt der Grenzwerte = Grenzwert des Cauchy-Produktes.)*

**3.34 Definition (Potenzreihe)** Sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine reelle Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$
Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ eine **Potenzreihe** um den Entwicklungspunkt a.
Speziell : $a = 0$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (Potenzreihe im engeren Sinne)

Hauptfrage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ?
Konvergiert immer für $x = a$ (Grenzwert: $a_o$)

**3.35 Satz**
*Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *Potenzreihe (um 0)*
*Dann gibt es* $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, *sodass gilt :*

*a.)* $\forall x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < R$, *(d.h.* $-R < x < R$*) konvergiert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *absolut,*

*(Falls* $R = \infty$, *so konvergiert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \forall x \in \mathbb{R}$ *absolut)*

*b.)* $\forall x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| > R$ *divergiert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

*c.)* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *so ist* $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

*R heißt* ***Konvergenzradius*** *der Potenzreihe*
*(Für* $|x| = R$ *sind keine allgemeinen Konvergenzaussagen möglich)*
***Konvergenzintervall***
$[-R, R], ]-R, R], [-R, R[, ]-R, R[$
*je nachdem ob Potenzreihe für* $x = R$ *beziehungsweise* $x = -R$ *konvergiert.*

**Beweis** Setze $R = \infty$, falls Potenzreihe $\forall x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.
Ansonsten: $R = sup\{|x| \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$ konvergiert$\}$
a.) 3.24
b.) WHK, 5.37
c.) $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \leq q < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
Fertig mit Wurzelkriterium □

**3.36 Bemerkung** Potenzreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - a^n)$
Ist R Konvergenzradius für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - a_n)$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < R$,
divergiert $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| > R$
Konvergenzintervall: $< a - R,\ a + R >$ mit <= [ oder ]

**3.37 Beispiel**

a.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ $R = 1$ geometrische Reihe
$|x| < 1$Reihe konvergiert absolut: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$
$|x| > 1$Reihe divergiert. Reihe divergiert für $x = 1$ und $x = -1$

b.) $(a = 0, a_n = \frac{1}{n!}$ konvergiert überall (3.30)$R = \infty$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Stellt Funktion dar, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
$exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$exp(x + y) := \sum\limits_{n0=}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$
$\underbrace{=}_{CauchyProdukt}$ $exp(x) \cdot exp(y)$
$x \in \mathbb{R} : exp(x - x) = exp(0) = 1$
$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
$exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e$
Eulersche Zahl: $e^x = 2,781...$
Schreibweise: $e^x := exp(x)$. Nur falls $x \in \mathbb{N}, x = k \in \mathbb{N}$
$exp(k) = exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k-Mal}) = \underbrace{exp(1) \cdot \ldots \cdot exp(1)}_{k-Mal} = \underbrace{e^k}_{\text{normale Potenz}}$
Andere Darstellung von e: $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

# §4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

**4.1 Definition** Eine reelle Funktion f einer Veränderlichen ist Abbildung: $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Möglicherweise: $D$ ist Intervall (oder endliche Vereinigung von Intervallen)
Unter Intervall verstehen wir im Folgenden „uneigentliche“ Intervalle:

$]-\infty, a], a \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
$]a, \infty[)\{y \in \mathbb{R} : x > a\}, ]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

**4.2 Beispiel**

a.) $g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ kann man zuordnen

Funktion: $\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \text{ zugeordnete Funktion} \end{cases}$
$g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x], g_1 \neq g_2 \to$ zugeordnete Polynomfunktionen sind verschieden. Angenommen gleich: $g_1(t) \Rightarrow g_2(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \quad (g_1 - g_2)(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$
$g_1 - g_2 \in \mathbb{R}[x]$ mit unendlich vielen Nullstellen $\underbrace{=}_{1.38} g_1 - g_2 = 0, g_1 = g_2$
$\Rightarrow$ Widerspruch
Laxe Schreibweise: Polynome= Polynomfunktionen ( ganzrationale Funktionen)

b.) $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion, $|f| : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $|f|(x) = |f(x)|\ \forall x \in D$

c.) $f, g : D \to \mathbb{R}, f \pm g : D \to \mathbb{R}(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \forall x \in D$ Summe, Differenz

d.) $f, g : D \to \mathbb{R}, f \cdot g : D \to \mathbb{R}(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \forall x \in D$ Produkt

e.) $f, g : D \to \mathbb{R}, g(x) \neq 0 \forall x \in D : \frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}, \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \forall x \in D$ Quotient

f.) Quotient von Polynomen: (gebrochen-) rationale Funktionen
$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{x^2 - 1}\ f : D \to \mathbb{R}, D = \mathbb{R} \backslash \{1, -1\}$

g.) $f : D_1 \to \mathbb{R}, g : D_2 \to \mathbb{R}$, es gelte $f(D_1) \subseteq D_2$

h.) Potenzreihe definiert auf ihrem Konvergenzintervall Funktion.
$exp(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$

i.) $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = exp(x)$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(exp(x)) = (exp(x))^2 + 1 = e^{2x} + 1$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = exp(x^2 + 1) = e^{x^2+1}$

j.) Einheitskreis $s = \sin(x), c = \cos(x)$
$x = x' + k \cdot 2\pi, x' \in [0, 2\pi[$
$\sin(x) = \sin(x')$
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ definiert, wo $\cos(x) \neq 0$,
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, definiert, wo $\sin(x) \neq 0$.

**4.3 Definition** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. $c \in \mathbb{R}$ heißt Adhärenzpunkt von $D$ falls Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit

(1) $a_n \in D \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n = c$

Klar: $D \subseteq \overline{D} : a \in D$ Folge :$(a, a, a, \ldots) D = ]a, b[$ $\overline{D} = [a, b]$

### 4.4 Beispiel

a.) $D = ]a, b[$, so $\overline{D} = [a, b]$

b.) I Intervall, $x_1, \ldots x_n \in J$, $D = I \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$ $\overline{D} = \overline{I}$

c.) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

**4.5 Definition** $f : D \to \mathbb{R} \quad c \in \overline{D}$

$d \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f(x) für x gegen c

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$, wenn für jede Folge $(a_n)_n \in D$,

die gegen c konvergiert, die Folge $(f(a_n))_n$ gegen d konvergiert

**4.6 Beispiel**

a.) $f(x) = x^2, D = R, c = 3$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) =?$

Sei $(a_n)_{n\geq k}$ Folge mit $\lim a_n = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 \underbrace{=}_{3.12c} (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2 = 3^2 = 9$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^2 = 9$

Allgemeiner: $\lim\limits_{x\to C} x^2 = c^2$

Für alle Polynome $f(x)$ gilt: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

b.) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

$c > 0 : \lim\limits_{x\to c} f(x) = c^2$

$c < 0 : \lim\limits_{x\to c} f(x) = 1$

$c = 0 :\ a_n = \frac{1}{n} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n})^2 = 0$

$b_n = -\frac{1}{n} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht

An „Sprungstellen“ existiert Grenzwert nicht.

$\tilde{f} = [0, \infty[ \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}(x) = 0$

$g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad g(x) = x^2 \forall x \neq 0$

$\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$\tilde{g} : \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \tilde{g}(x)$ existiert nicht!

c.) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =?$

Sei $(a_n)$ Folge in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (d.h. alle $a_n \neq 1$) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2-1}{a_n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 1) = 2$

d.) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$
$a_n = \frac{1}{n\pi} \qquad \lim\limits_{n \to \infty}(a_n) = 0$
$f(a_n) = \sin(n\pi) = 0 \forall n \quad \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 0$
$b_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} \quad \lim\limits_{n \to \infty}(b_n) = 0$
$f(b_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \forall n \quad \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = 1 \neq 0$ Grenzwert ex. nicht!

e.) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$
$\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$
$(a_n)$ Folge in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
$f(a_n) = a_n \cdot sin(\frac{1}{a_n})$
$0 \leq |f(a_n)| = |a_n| \left|\sin(\frac{1}{a_n})\right| \leq |a_n|$
$|f(a_n)| \to 0, f(a_n) \to 0, \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = 0$

**4.7 Satz**
*Alle auftretenden Funktionen seien auf D definiert, $c \in \overline{D}$.*
*Existieren die Grenzwerte auf den linken Seiten, dann auch auf den rechten Seite und sie stimmen überein.*

*a.)* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c}(f \pm g)(x)$

*b.)* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c}(f \cdot g)(x)$

*c.) Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in D$ und $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, so gilt*
$\frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \lim\limits_{x \to c}(\frac{f}{g})(x)$

*d.)* $\left|\lim\limits_{x \to c} f(x)\right| = \lim\limits_{x \to c} |f(x)|$
*(Folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für Folgen.)*

**Definition**
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = d : \quad \forall (a_n)_n$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = d$

**4.8 Satz ($\varepsilon - \delta$ Kriterium für Grenzwerte)**
*$f : D \to \mathbb{R},\ c \in \overline{D}$. Dann sind äquivalent:*

*(1)* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$

*(2)* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$*:* $\forall x \in D$ *mit* $|x - c| \leq \delta$ *ist* $|f(x) - d| \leq \varepsilon$

**4.9 Definition** Sei $D = < b, \infty[\ ,\ \ f : D \to \mathbb{R}$ (z.B. $D = \mathbb{R}$)
$f(x)$ **konvergiert gegen** $d \in \mathbb{R}$ für $x$ gegen $\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = d$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\, L > b \text{ mit } |f(x) - d| \leq \varepsilon\ \forall x \geq L$$

In Quantorenschreibweise: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > b \quad \forall x \geq L : |f(x) - d| \leq \varepsilon$
Entspricht der Definition für $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = d$

### 4.10 Beispiel

a.) $f(x) = \frac{1}{x} \quad D = ]0, \infty[$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $L = \frac{1}{\varepsilon}$.
Ist $x \geq L > 0$, so $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{L} = \varepsilon$

b.) Allgemein gilt: $P, Q$ Polynome vom Grad $k, l, \quad l \geq k$.
$P(x) = a_k x^k + \ldots, \quad Q(x) = b_l a^l + \ldots \quad a_k \neq 0, b_l \neq 0$.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{für } l = k \\ \infty & \text{für } k > l \end{cases}$$

**4.11 Bemerkung** Rechenregeln aus 4.7 gelten auch für $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = d \ \ (\lim\limits_{x\to-\infty})$

### 4.12 Definition

a.) $f : D \to \mathbb{R}, c \in \overline{D}$
$f(x)$ divergiert gegen $\infty$ für x gegen c, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, falls gilt:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : |x - c| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$

b.) $f : < b, \infty[ \to \mathbb{R}$
$f(x)$ divergiert gegen $\infty$ für x gegen $\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls gilt:

$$\forall M > 0 \quad \exists L > b \quad \forall x \geq L : f(x) \geq M$$

Analog:
$\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

### 4.13 Satz

*a.) Falls* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ *oder* $-\infty$*, so* $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$

*b.) Falls* $\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x) = \infty$ *oder* $-\infty$*, so* $\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} \frac{1}{f(x)} = 0$

*c.) Falls* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ *und falls* $s > 0$ *existiert mit* $f(x) > 0 \forall x \in [c - s, c + s] \cap D$,
*so ist* $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

*d.) Falls* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *und falls T existiert mit* $f(x) > 0 \ (f(x) < 0) \ \ \forall x \geq T$,
*so* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

*e.) Falls* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ *und falls T existiert mit* $f(x) > 0 \ (f(x) < 0) \ \ \forall x \leq T$,
*so* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty(-\infty)$

### 4.14 Beispiel

a.) $P(x) = a_k x^k + \ldots + a_0, k > 0, a_K \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } a_k > 0, \text{ k ungerade} \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0, \text{ k gerade} \\ \infty, & \text{falls } a_k > 0, \text{ k gerade} \\ \infty, & \text{falls } a_k < 0, \text{ k ungerade} \end{cases}$$

**Beweis**

$a_k > 0, \lim_{x\to\infty} P(x) = \infty :$

Sei $M > 0$. Suche L, so dass für alle $x \geq L : P(x) \geq M$

$x > 0 :$

$P(x) = a_k x^k + \ldots + a_0 \geq a_k x^k - (|a_{k-1}|\, x^{k-1} + \ldots + |a_0|)$

$\geq a_k x^k - (|a_{k-1}|\, x^{k-1} + (k-1)x^{k-1})$

falls $x \geq max\{1, |a_0|, \ldots, |a_{k-2}|\}$

$= x^{k-1}(a_k x - |a_{k-1}| - (k-1)) \geq M$

$x \geq \frac{|M|+|a_{k-1}|+(k-1)}{a_k}$

Wähle $L = max\left(1, |a_o|, \ldots, |a_{k-2}|, \frac{M+|a_{k-1}|+(k-1)}{a_k}\right)$

b.) $P(x) = a_k x^k + \ldots + a_0,\ Q(x) = b_l x^l + \ldots + b_0,\ a_k \neq 0, b_L \neq 0, k > l$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_l \text{ gleiches Vorzeichen} \\ -\infty, & \text{falls } a_k \text{ und } b_l \text{ unterschiedliches Vorzeichen} \end{cases}$$

**Beweis** folgt nach: (a.), 4.13 d.) und 4.10 b.)

c.)
- $f(x) = \frac{1}{x},\ D = ]0, \infty[,\ \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
- $f(x) = \frac{1}{x},\ D = ]-\infty, 0[,\ \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x},\ D = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht

  rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

  linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

d.) $f(x) = \frac{1}{|x|}, D = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

e.) $f(x) = \frac{e^x}{x^n} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\forall M > 0\ \exists L \in D$

$\forall x \geq L : f(x) \geq M$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Sei $M > 0$ beliebig.

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad$ Falls $x > 0, e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \quad$ Wähle $L = M(n+1)!$

Ist $x \geq L$, so $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \geq \frac{L}{(n+1)!} = M$

f.) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ (nach e. und 4.13a.)

# §5 Stetigkeit

(stetig = continous)

**5.1 Definition** $f : D \to \mathbb{R}$

a.) Sei $c \in D$. f heißt stetig an der Stelle c, falls $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

b.) Ist f stetig in jedem $c \in D$, so heißt f (überall) stetig.

**5.2 Bemerkung** $f : D \to \mathbb{R}, c \in D$. Dann sind gleichwertig:

(1) f ist stetig in c.

(2) Für jede Folge $(a_n)_n, a_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$

(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass gilt:
Ist $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$, so ist $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$

**5.3 Beispiel**

a.) Jedes Polynom ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. (Folgt aus Beispiel 4.6.a.)

b.) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = +\sqrt{x}$
f ist stetig in $[0, \infty[$:
$c \in [0, \infty[ \qquad f$ ist stetig in $c$.
Sei $\varepsilon > 0$.
Ist $c = 0$, so setze $\delta = \varepsilon^2$, denn dann gilt:
Ist $0 \leq x \leq \delta = \varepsilon^2$, so ist $f(x) = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$
$|f(x) - f(0)|$
Ist $c > 0$, so ist $|x - c| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| \left|\sqrt{x} + \sqrt{c}\right| \geq \sqrt{c} \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right|$,
$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| \leq \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$
Wähle $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{c}$
Ist $|x - c| \leq \delta$, so $\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| \leq \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$

c.) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ f ist nicht stetig an der Stelle 0.
Allgemein: Hat f an der Stelle c einen „Sprung“, so ist f nicht stetig in c.

d.) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f ist nicht stetig an der Stelle 0.

e.) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f ist nicht stetig in 0, da $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht existiert.

f.) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f ist stetig an der Stelle 0, da $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$ (4.6.f.)

g.) $f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = \cos(x)$
f,g stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

h.) $f(x) = |x|$
f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

**5.4 Satz**
*Rechenregeln für Stetigkeit.*
*$f, g : D \to \mathbb{R}$, seien in $c \in D$ stetig.*
*Dann sind auch $f \pm g, f \cdot g, |f|$ in $c$ stetig.*
*Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in $c$.*

**5.5 Satz**
*$D, D' \subseteq \mathbb{R}, \quad f : D \to \mathbb{R}, \quad g : D' \to \mathbb{R}, \quad f(D) \subseteq D'$.*
*Sind f und g stetig in D beziehungsweiße D', so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in D.*

**Beweis** $c \in D$. Sei $(a_n)_n$ Folge , $a_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Da f stetig, $\underbrace{f(a_n)}_{\in D'} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \underbrace{f(c)}_{\in D'}$
Da g stetig, $g(f(a_n)) \underbrace{\to}_{n\to\infty} g(f(c))$
$\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(c)$ □

**5.6 Beispiel**

a.) $f(x) = +\sqrt{\frac{1}{|x^2-1|}} \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$
f ist stetig auf D.
$g(x) = x^2 - 1, \;\; h(x) = |x|\,, \;\; k(x) = \frac{1}{x}, \;\; l(x) = +\sqrt{x}$
stetig, wo sie definiert sind.
$(l \circ k \circ h \circ g)(x) = l(k(h(g(x)))) = l(k(h(x^2 - 1))) = l(k(\left|x^2 - 1\right|)) = l(\frac{1}{|x^2-1|}) = +\sqrt{\frac{1}{|x^2-1|}} = f(x)$
5.5: f ist stetig.

b.) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Richtig für $x = 0$ (5.3.f)
$x \neq 0, \qquad x \cdot \sin(\frac{1}{x})$
$\frac{1}{x}, \sin$ stetig.
$x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ stetig, da $\sin(\frac{1}{x})$ stetig ist. (5.5)

c.) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), \qquad D : \mathbb{R}\backslash\{0\}$
f ist stetig auf D (5.5)

d.) $f(x) = \tan(x)$
$D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

**5.7 Satz**
*(Nullstellensatz für stetige Funktionen)*
*$f : D = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ stetig.*

*Angenommen es existieren $u, v \in D$ mit $u < v$ und $f(u) < 0 < f(v)$*
*Dann existiert $w, u < w < v$, mit $f(w) = 0$*
***Beweisidee:***
*Bisektionsverfahren*
$a_0 = u, b_0 = v$
*Ist $f(c) < 0$, so setze $a_1 = c, b_1 = b_0$ sonst $a_1 = a_0, b_1 = c$ usw.*
*Bisektionsverfahren liefert $(a_n), (b_n), w \in \mathbb{R}$*
$a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = w \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = w$
*f stetig:*
$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(w)$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(w)$
$f(a_n) < 0$
$f(w) = \lim f(a_n) \leq 0$
$f(b_n) \geq 0$
$f(w) = \lim f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(w) = 0$

## 5.8 Satz

*(Zwischenwertsatz)*

a.) *$f : D = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ stetig, $u, v \in D, u < v$.*
*Dann nimmt f auf $[u, v]$ jeden zwischen f(u) und f(v) liegenden Wert an. (und vielleicht auch weitere)*

b.) *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder Intervall (aber im Allgemeinen $f(\langle a, b\rangle) \neq \langle f(a), f(b)\rangle$*

***Beweis***

a.) *$f(u) < b < f(v)$ Wende 5.7 auf $g(x) = f(x) - b$ an*

b.) *Mit 2 Punkten aus $f(D)$ liegt jeder dazwischen liegende Wert in $f(D)$ nach a.) Daher ist $f(D)$ Intervall.*

## 5.9 Satz

*(Minimax- Satz)*
*$f : D \to \mathbb{R}$ stetig, D abgeschlossenes Intervall.*
*$(D = [a, b], a, b \in \mathbb{R})$. Dann nimmt f ein Maximum und Minimum auf D an,*
*das heißt: $x_{max} \in D, x_{min} \in D$ mit $f(x_{max}) \geq f(x) \qquad f(x_{min}) \leq f(x) \forall x \in D$.*
*Abgeschlossenes Intervall ist wichtig:*
$f(x) = x^2, D = [0, 1]$
$D = [0, 1] \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ *Hat kein Maximum.*
*Beweis WHK: Theorem 6.34*
*$f : D \to D'$ bijektiv. Dann existiert Umkehrfunktion $f^{-1} \cdot D' \to D$ mit*
$f^{-1} \circ f = id_D, f \circ f^{-1} = id_{D'}$
$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D$
$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in D'$

**5.10 Definition** $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monton wachsend falls gilt:
Sind $x, y \in D, x < y,$ so ist $\overline{f(x) \le f(y) \qquad (f(x) < f(y))}$
(streng) monoton fallend: $x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \qquad (f(x) > f(y))$

**5.11 Satz**
*Sei D Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann: f injektiv auf D $\Leftrightarrow$ f streng monoton.*

**5.12 Satz**
*D Intervall. $f : D \to f(D) = D'$ eine stetige, streng monotone (d.h. bijektive) Funktion. Dann ist $f^{-1} : D' \to D$ auch stetig. (Beweis WHK Theorem 6.25)*

**5.13 Korollar**

*a.) Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ $(R_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\})$*
*Also ist die Umkehrfunktion $f^{-1} = +\sqrt[n]{x}$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$*

*b.) Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$*
*Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$*

**5.14 Satz**
*Sei $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.*
*Dann ist f stetig auf $]a - R, a + R[$.*

**5.15 Korollar** $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^i}{i!} + \ldots$
*ist stetig auf $\mathbb{R}$*

**5.16 Satz**
*$exp : \mathbb{R} \to ]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend, also bijektiv.*
*Die Umkehrfunktion heißt $ln(x)$, Logarithmus naturalis, $ln$ $:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bijektiv, stetig (streng monoton wachsend)*
*Es gilt: $ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y) \;\; \forall x, y > 0, \;\; ln(1) = 0$*

**Beweis** $exp(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : exp(x) > 1$
$x, y, y = x + h, \; h > 0 \quad exp(y) = exp(x + h) = \underbrace{exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{exp(h)}_{>1} > exp(x).$
$exp$ stetig und streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $ln$ stetig und streng monoton wachsend.
$x, y > 0 : \quad \exists a, b \in \mathbb{R} \;\; x = exp(a), y = exp(b)$
$ln(xy) = ln(exp(a) \cdot exp(b)) = ln(exp(a + b)) = id(a + b) = a + b = ln(x) + ln(y).$ □

**5.17 Satz**
*$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$ (für $n \in \mathbb{N}$).*
*$(\lim\limits_{x\to\infty} ln(x) = \infty,$ aber schwach steigend)*
$x > 0, \; x = exp(y) \quad \frac{ln(x)}{x^n} = \frac{y}{(exp(y))^n} \le \frac{y}{exp(y)} \underbrace{\to}_{y\to\infty} 0$
*4.14f) $y \to \infty \Rightarrow x \to \infty, \;\; \lim \frac{ln(x)}{x^n} = 0$*
*Bemerkung: $P(x)$ Polynom vom Grad $n \ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(x)}{P(x)} = 0$*
$(ln(n))_n \in o(n) \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0$

**5.18 Definition**
Für $a > 0$ setze $a^x = exp(x \cdot ln(a))$ (Für $a = e : e^x = exp(x)$, da $ln(e) = 1$)

**5.19 Satz**
*Sei $a > 0$:*

a.) *Es ist $x \mapsto a^x$, $\mathbb{R} \to ]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend, wenn $a < 1$.*

b.) *Es ist $a^x \cdot a^y = a^{x+y}, (a^x)^y = a^{xy} \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$*

c.) *Für $n \in \mathbb{N}$ stimmt $a^n$ mit der normalen n-ten Potenz überein und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$*
*(Definition anwenden)*

**5.20 Definition**
Für $a > 0, a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von $a^x$ der **Logarithmus zur Basis** a $log_a(x)$
$(a = l, log_e = ln)$

**5.21 Satz**
$log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$
$log_a(x^y) = y \cdot log_a(x)$ *für $x, y > 0$ Definition anwenden.*

# §6 Differenzierbare Funktionen

Kann man in einem Punkt c eine Tangente an den Graph g legen?
Steigung der Sekante:
$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ definiert auf $D \backslash \{c\}$
Grenzwert $x \to c$ existiert, dann ist das die Steigung der Tangente im Punkt $(c, f(c))$

**6.1 Definition** $I$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}, c \in J$

a.) $f$ heißt **differenzierbar** an der Stelle c, falls

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert.
Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** von f an der Stelle c. (Differentialquotient).
$f'(c)$, $(\frac{df}{dx}(c))$

b.) f heißt differenzierbar in I , falls f in allen $c \in J$ differenzierbar ist.
Die Funktion $f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$ heißt Ableitung von f.

**6.2 Beispiel**
$f(x) = a \cdot x^n \;\; (n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{R}) \; I = \mathbb{R}$

$c \in \mathbb{R}, f^{'}(c) = ?$

$\lim\limits_{x\to c} \frac{ax^n - ac^n}{x-c} = \frac{a(x-c)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot c+\ldots+x\cdot c^{n-2}+c^{n-1})}{x-c} =$

$a(c^{n-1} + c^{n-2} \cdot c + \ldots + c \cdot c^{n-2} + c^{n-1}) = a \cdot n \cdot c^{n-1}$

$f(x) = a \cdot x^n, \quad f^{'}(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

f konstant $\to f^{'} = 0$

### 6.3 Satz

*I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}, c \in I$. Dann sind äquivalent:*

*(1) f ist in c differenzierbar.*

*(2) Es gibt Funktion R: $I \to \mathbb{R}$ stetig in c und $R(c) = 0$*
*(das heißt: $\lim\limits_{x\to c} R(x) = 0$) und ein es gibt ein $d \in \mathbb{R}$, so dass gilt:*

$$f(x) = \underbrace{f(c) + d \cdot (x-c)}_{\text{Gerade durch } (c, f(c)) \text{ mit Steigung } d \text{ (= Tangente)}} + R(x)(x-c)$$

*Gilt (2), so ist $d = f^{'}(c)$*
*(2) besagt, dass sich $f(x)$ in der Nähe von c gut durch lineare Funktion $l(x) = f(c) + f^{'}(c)(x-c)$ approximieren lässt.*

***Beweis:*** $(1) \Rightarrow (2)$

$$Setze{:}R(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f^{'}(c), & x \neq c \\ 0 \quad \text{für } x{=}c \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to c} R(x) = 0 = R(0), \ d = f^{'}(c)$

$(2) \Rightarrow (1) : \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = d + R(x)$

$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = d \ \ (d = f^{'}(c))$

### 6.4 Satz

*f differenzierbar in c $\Rightarrow$ f stetig in c*
*Beweis folgt aus 6.3 (2)*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left( f(c) + f^{'}(c)\underbrace{(x-c)}_{0} + R(x)(x-c) \right) = f(c)$$

***Bemerkung:***
*Umkehrung von 6.4 gilt nicht.*
*$f(x) = |x|$ stetig, aber nicht differenzierbar in $c = 0$:*

$a_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(0)}{a_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

$b_n = -\frac{1}{n} \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = \underline{-1}$

*Daraus folgern wir:*
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *existiert nicht.*

### 6.5 Satz

*(Ableitungsregeln)*
*I Intervall, $c \in I$*
*Für a.) -c.): $f, g : I \to \mathbb{R}$, beide differenzierbar in c.*

*a.) (Linearität) $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ differenzierbar in c und*
*$(\alpha f + \beta g)^{'}(c) = \alpha f^{'}(c) + \beta g^{'}(c)$.*

*b.) (Produktregel nach Leibniz)*
*$f \cdot g$ differenzierbar in c und $(f \cdot g)^{'}(c) = f(c) \cdot g^{'}(c) + f^{'}(c)g(c)$*

*c.) (Quotientenregel)*
*Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in I$, so $\frac{f}{g}$ differenzierbar in c und $(\frac{f}{g})^{'}(c) = \frac{g(c)\cdot f^{'}(c) - f(c)\cdot g^{'}(c)}{g(c)^2}$*

*d.) (Kettenregel)*
*$I_1$ Kettenregel: $f : I \to I_1$ in c differenzierbar, $g : I_1 \to \mathbb{R}$ in $f(c)$ differenzierbar.*
*Dann ist $g \circ f$ in c differenzierbar und:*

$$(g \circ f)^{'}(c) = g^{'}(f(c)) \cdot f^{'}(c)$$

*Beweis für b.) 6.3 (2)*
$f(x) = f(c) + f^{'}(c)(x-c) + R(x)(x-c) \quad \lim_{x\to\infty} R(x) = 0$
$g(x) = g(c) + g^{'}(c)(x-c) + S(x)(x-c) \quad \lim_{x\to\infty} S(x) = 0$
$f(x) \cdot g(x) = f(c)g(c) + \Big(f(c)g^{'}(c) + f^{'}(c)g(c)\Big)(x-c)$
$+ \underbrace{\Big(f^{'}(c)g^{'}(c)(x-c) + (f(c) + f^{'}(c)(x-c))S(x) + (g(c) + g^{'}(c)(x-c))R(x)\Big)}_{\lim_{x\to c}=0}$
*(6.3 (2): $(f \cdot g)^{'}(c) = f(c)g^{'}(c) + f^{'}(c)g(c)$*

**Beispiel** a.) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$f^{'}(x) \underbrace{=}_{6.5.(a),6.2} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$

b.) $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad I = ]0,\infty[ \ (n \in \mathbb{N})$
6.5.c.): $f^{'}(x) = \frac{0-1\cdot n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = (-n) \cdot x^{-(n+1)} = (-n)x^{-n-1}$

c.) $f(x) = (x^2 + x + 2)^2$
Produktregel: $2(2x+1)(x^2+x+1) = f^{'}(x)$
Kettenregel: $2(x^2+x+1)(2x+1) = f^{'}(x)$

d.) $(\sin(x))^{'} = \cos(x), \quad (cos(x))^{'} = -\sin(x)$
Additionstheoreme für sin und cos:
$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
Außerdem gilt:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
$\lim \frac{\sin(x)}{x} = 1 : \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$
Fläche des schraffierten Stücks: $\frac{x}{2}$
Fläche von $\Delta 0AC$ : $\frac{\sin(x)}{2}$
Fläche von $\Delta 0BC$ : $\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$
$$\underbrace{\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2}}_{\frac{\sin(x)}{x}} < \underbrace{\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}}_{\frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)}$$

$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{x}{1+\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)^2}{x^2} \qquad (\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$
Daraus folgern wir die Ableitung :
$\sin(c)' = \frac{\sin(x)-\sin(c)}{x-c} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y+c=-\sin c)}{y}$
$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)\cdot\cos c()+\cos(y)\sin(c)-\sin(c)}{y}$
$= \underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(c)(\cos(y)-1}{y}}_{=0} + \underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\cos(c)\sin(y)}{y}}_{\cos(c)}$
Das ist der einfache(!) elementare Beweis - trickreich, aber noch nachvollziehbar.

e.) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
$f(x)$ differenzierbar für alle $x \neq 0$
Zu tun für $c = 0 : (a_n) \to 0$
$\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} = \frac{f(a_n)-1}{a_n} \to ?$
Allgemein gilt: Falls $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = d = \lim\limits_{x\to c^-} g(x)$
so gilt: $\lim\limits_{x\to c} g(x) = d$
$\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = d \forall (a_n) \to c, \;\; a_n \geq c \;\; (g(a_n)) \to d$
$\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = d \forall (a_n) \to c, \;\; a_n \leq c \;\; (g(a_n)) \to d$
$a_n < 0 \quad \frac{(a_n)-1}{a_n} = \frac{0}{a_n} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$
$a_n > 0 \quad \frac{(a_n)-1}{a_n} = \frac{\cos(a_n)-1}{a_n} = 0 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$
$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

**6.6 Satz**
*(Ableitung der Umkehrfunktion)*
*$f$ bijektiv auf Intervall $I$, $f(I) = I_1$*
*Sei $f$ in $c \in I$ differenzierbar und $f'(c) \neq 0$*
*Dann ist $f'$ : $I_1 \to I$ an der Stelle $f(c)$ differenzierbar und es gilt:*

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

*Ist $f$ auf ganz $I$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, so ist $f^{-1}$ auf ganz $I_1$ differenzierbar und es gilt:*
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in I_1.$
*Beweis:*
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$
$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$
*Kettenregel:*
*Ist $f'(c) \neq 0 : (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$*

**6.7 Bemerkung** Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.6 ist notwendig:
$f(x) = x^3, \; f'(x) = 3x^2, \; f'(0) = 0$
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{-1}(x)-f-1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$

$(f^{-1})'(0)$ existiert nicht.

### 6.8 Beispiel

a.) Wir setzen voraus:
$exp(x)' = exp(x)$

b.) $f(x) = a^x \ \ (a \in \mathbb{R}, a > 0)$
$5.18 : a^x = exp(x \cdot ln(a))$
Kettenregel:
$(a^x)' = exp(x \cdot \ln(a))) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$

c.) $f(x) = \ln(x)$ auf $]0, \infty[$
$ln(x) = exp^{-1}(x) \quad exp(x)' = exp(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
$ln'(y) \underbrace{=}_{6.6} \frac{1}{exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}$
$ln'(x) = \frac{1}{x} \ \ \forall x \in ]0, \infty[$

d.) $f(x) = \log_a(x) \ \ (a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1)$ auf $]0, \infty[$
$\log_a'(x) \underbrace{=}_{b.)} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

e.) $f(x) = x(\ln(x) - 1)$ auf $]0, \infty[$
Produktregel: $f'(x) = \ln(x) - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x)$

f.) $f(x) = x^b, \ \ b \in \mathbb{R}$
$f(x) = \exp(b \cdot \ln(x))$
$f'(x) = \exp(b \cdot \ln(x)) \cdot \frac{b}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = b \cdot x^{b-1}$

g.) $\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (logarithmische Ableitung)
$f(x) = e^x \cdot \sin(x) \cdot x^5$
$\ln(f(x)) = \underbrace{\ln(e^x)}_{=x} + \ln(\sin(x)) + \ln(x^5)$
$\ln(f(x))' = 1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{5 \cdot x^4}{x^5} = 1 + \cot(x) + \frac{5}{x}$
$f'(x) = (1 + \cot(x) + \frac{5}{x}) \cdot e^x \cdot \sin(x) \cdot x^5$
$= e^x \cdot \sin(x) \cdot x^5 + e^x \cdot \cos(x) \cdot x^5 + 5e^x \cdot \sin(x) \cdot x^4$

**6.9 Definition** $f : D \to \mathbb{R}$ hat lokales Maximum (Minimum) an der Stelle c, falls $s \in \mathbb{R}, s > 0$ existiert, so dass:
$f(x) \underbrace{\leq}_{(\geq)} f(c) \ \ \forall x \in [c - s, c + s]$

### 6.10 Satz

*Ist f differenzierbar auf* $\underbrace{D}_{\text{offenes Intervall}}$ *und hat f an der Stelle* $c \in D$ *lokales Maximum (Minimum), so ist* $f'(c) = 0$
*Beweis:* $a_n < c, a_n \in D, (a_n) \to c, \ a_n \geq c - s$
$f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} \geq 0$
$\frac{f(a_n) - f(c)}{\underbrace{a_n - c}_{\leq 0}} \geq 0$
*Beachte: Aus* $f'(c) = 0$ *folgt nicht notwendig, dass f lokales Maximum oder Minimum*

*in c besitzt!*
$(f(x) = x^3, \;\; f^{'}(x) = 3x^2, \;\; f^{'}(0) = 0)$

**6.11 Satz (Satz von Rolle)**
*$I = [a, b], \; f : I \to \mathbb{R}$ stetig in I und differenzierbar in $]a, b[$. Sei ferner $f(a) = f(b)$*
*Dann existiert $c \in ]a, b[$ mit $f^{'}(c) = 0$*

**Beweis** Ist $f$ konstant, so $f^{'} = 0$. Dann kann man jedes $c \in ]a, b[$ wählen. Sei also f nicht konstant. Nach 5.9 hat f globales Maximum $x_{\max}$ bzw. Minimum $x_{\min}$ in
$]a, b[, \; f(x_{\max}) > f(x_{\min})$. $f(a) = f(b)$
Wegen $f(a) = f(b)$ liegt mindestens eines von $x_{\max}$ oder $x_{\min}$ in $]a, b[$. Nach 6.10 ist dort die Ableitung 0. □

**6.12 Satz (Mittelwertsatz)**
*$I = [a, b], \; f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, differenzierbar auf $]a, b[$.*
*Dann gibt es $c \in ]a, b[$ mit $f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*
*(Steigung der Sekante durch $((a, f(a)), (b, f(b)))$*
*(Satz von Rolle: Spezialfall $f(a) = f(b)$)*

**Beweis** $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$
Wende 6.11 auf $h(x) = f(x) - s(x)$ an.
$h(a) = f(a) - s(a) = 0$
$h(b) = f(b) - s(b) = 0$
$\exists c \in ]a, b[: \; h^{'}(c) = 0, f^{'}(c) - s^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

**6.13 Korollar**
*$I = [a, b], \;\; f : I \to \mathbb{R}$ stetig in I, auf $]a, b[$ differenzierbar.*

*a.) Ist $f^{'}(x) = 0 \; \forall x \in ]a, b[$ , so ist f konstant auf I.*

*b.) Ist $f^{'}(x) \underbrace{\geq}_{\leq} 0 \; \forall x \in ]a, b[$ , so ist f monoton wachsend (fallend) auf I.*

*c.) Ist $f^{'}(x) \underbrace{>}_{<} 0 \; \forall x \in ]a, b[$ , so ist f streng monoton wachsend (fallend) auf I.*

*Beweis:*
*$u, v \in [a, b], u < v$. Wende 6.12 auf $[u, v]$ an. Dann existieren $c \in ]u, v[: \; f^{'}(c) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$.*

*a.) $f(v) = f(u)$*

*b.) $f(v) \underbrace{\geq}_{\leq} f(u)$*

*c.) $f(v) \underbrace{>}_{<} f(u)$*

**6.14 Satz (2.Mittelwertsatz)**

*$f, g$ $[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[a, b]$ differenzierbar.*
*Es gelte:*
*$g^{'}(x) > 0$ $\forall x \in ]a, b[$ oder*
*$g^{'}(x) < 0$ $\forall x \in ]a, b[$ Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in ]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

*(Mittelwertsatz ist ein Spezialfall hiervon: $g(x) = x$)*

**Beweis** Wende Satz von Rolle auf
$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ an.
$h(a) = f(a)$
$h(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$
$h(a) = h(b)$
Existiert ein $c \in ]a, b[$ mit
$0 = h^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g^{'}(c)$ Behauptung folgt. □

**6.15 Satz (Regeln von L'Hôpital)**

*a.) $\mathcal{I}$ Intervall, $c \in \mathcal{I}$ $f, g : \mathcal{I} \backslash \{c\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*
*Es gelte:*
*$g^{'}(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{I} \backslash \{c\}$ oder*
*$g^{'}(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{I} \backslash \{c\}$*
*Es gelte $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$*
*Falls $\lim_{x \to c} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$ existiert, so ist auch*
*$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$*

*b.) $f, g :$ $[a, \infty[$ differenzierbar, $g^{'}(x) > 0$ $\forall x \in [a, \infty[$ oder*
*$g^{'}(x) > 0$ $\forall x \in [a, \infty[$*
*Ist $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ oder $\infty$ und existiert*
*$\lim_{x \to \infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$, so ist $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$*

**Beweis** a.) Für $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$
Def.: $f(c) = g(c) = 0$
Damit sind f und g auf $\mathcal{I}$ definiert und stetig.
Ist $x \in \mathcal{I}$ und $x < c$ oder $x > c$ , so kann man 2. Mittelwertsatz auf $[x, c]$oder $[c, x]$ anwenden.
Zeige: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathcal{I}$ mit $0 < |x - c| \leq \delta$ gilt

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ Es existiert $\delta > 0$ mit:

$$\left| L - \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \right| \leq \varepsilon \ \forall y \in \mathcal{I}$$

mit $0 < |c - y| \leq \delta$
Sei $x \in \mathcal{I}$ mit $< |x - c| \leq \delta$

2.Mittelwertsatz:
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(z)}{f'(z)}$ für
ein $z \in ]c, x[$ bzw. $z \in ]x, c[$
Also ist $|z - c| \leq \delta$ und daher:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - L\right| \leq \varepsilon$$

### 6.16 Beispiele

1. $a \in \mathbb{R}$
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+ax)}{x} \underset{L'H+6.8}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a}{1+ax} = a$
2. $\mathcal{I} = ]0, \infty[$
   $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-(-ln(x))}{\frac{1}{x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} -\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = 0$
3. $0^0 =? \lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} exp(x \cdot ln(x))$
   $\left(e^{x\cdot ln(x)} = e^{ln(x^x)} = x^x\right)$
   exp stetig.
   $\lim\limits_{x\to 0} exp(x \cdot ln(x)) = exp(0) = 1$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0 \ \ (ln(n))_n \in o(n)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} \quad , a_n, b_n \neq 0$
   $\underset{\text{n-Mal nach L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n n!}{b_n n!} = \frac{a_n}{b_n}$

# §7 Das bestimmte Integral

Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse über einem Intervall:
$[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$

**7.1 Definition** a.) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ **Charakteristische Funktion** von A:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

(Beispiel: $5 \cdot 1_{[0,2]} \ \ - 2 \cdot 1_{[1,3]}$)

b.) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt, so dass $f$ auf jedem offenen Intervall $]a_k, a_{k+1}[,\ k = 0, \ldots, n - 1$ konstant ist.
Äquivalent: $f = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k 1_{]a_k,a_{k+1}[} + \sum\limits_{k=0}^{n} f(a_k)1_{\{a_k\}}$

**7.2 Satz**
$\mathcal{I} = [a,b]$

*a.) Jede Treppenfunktion auf $\mathcal{I}$ ist beschränkt.*

*b.) Jede konstante Funktion auf $\mathcal{I}$ ist Treppenfunktion.*

*c.) Summe, Produkt und Betrag von Treppenfunktion ist wieder eine Treppenfunktion.*

**7.3 Definition** $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R},\;\; \mathcal{I} = [a,b], f$ Treppenfunktion.

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot 1_{]a_k,a_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} f(a_k) 1_{\{a_k\}}$$

$\int\limits_a^b f dx = \int\limits_a^b f(x)dx := \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)c_k$ das **bestimmte Integral** von f über $[a,b]$
(Flächeninhalt der Säulen) Das Integral kann negativ sein!

**7.4 Definition** $f : [a,b] \to$

$\mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion** (oder integrierbare Funktion)
$\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\; \exists$ Treppenfunktion g mit $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon\; \forall x \in [a,b]$

(gleichmäßige Approximierbarkeit von f durch Treppenfunktion)
Jede Treppenfunktion ist Regelfunktion.

**7.5 Satz**
*Satz 7.2 gilt auch für Regelfunktionen.*

**7.6 Satz**
*Jede stetige Funktion ist Regelfunktion (auf abgeschlossenen Intervallen!)*
*(WHK, Satz 7.19)*

**7.7 Beispiel**

a.) $f(x) = x^2,\;\; [0,t]$
Zerlege das Intervall $[0,t]$ in n gleiche Teile der Länge $\frac{t}{n}$.
$[0, \frac{t}{n}[, [\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}[ \ldots [\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}[, \ldots, [\frac{(n-1)t}{n}, t[$
$f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\frac{it}{n})^2 1_{[\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}[} + t^2 1_{\{t\}}$
$|f(x) - f_n(x)| = ?\qquad |f(t) - f_n(t)| = 0,$
$0 \leq x < t,\; \exists\, i \in \{0, \ldots, n-1\} : x \in [\frac{it}{n}, \frac{(i+1)t}{n}[.$
$\left|f_n(x) - x^2\right| = \left|(\frac{it}{n})^2 - x^2\right| < (\frac{(i+1)t}{n})^2 - (\frac{it}{n})^2 = \frac{2it+t}{n^2} < \frac{2t}{n} + \frac{t}{n^2} \to 0$
$f(x) = x^2$ Regelfunktion!

b.) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ auf$[0,1]$
Hierbei handelt es sich nicht um eine Regelfunktion, da man hier keinen Flächeninhalt bestimmen kann.

**7.8 Lemma**

*a.) $f$ Regelfunktion auf $[a, b]$, $(f_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gegen $f$ **gleichmäßig** konvergiert, das heißt:*
*es existiert eine Nullfolge $(a_n)_n$, $a_n \geq 0$, mit $|f(x) - f_n(x)| \leq a_n \forall x \in [a, b]$, $\forall n$*
*Dann konvergiert $\left( \int_a^b f_n(x)dx \right)_n$ in $\mathbb{R}$*

*b.) $(f_n)_n, (g_n)_n$ zwei Folgen von Treppenfunktionen, die gegen Regelfunktion $f$ gleichmäßig konvergieren, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx$$

*(WHK, 7.20)*

**7.9 Definition** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, $(f_n)_n$ Folge von Treppenfunktionen, die (gemäß 7.8 a.)) gleichmäßig gegen f konvergiert.

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f(x)dx := \lim_{x\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

**bestimmtes Integral** von $f$ über $[a, b]$

**7.10 Beispiel**

$\int_0^t x^2 dx = ?$

$\int_0^t f_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{it}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^3}{n^3} i^2$

$= \frac{t^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{t^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{t^3}{6} \frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}$

$\int_0^t x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{6} \frac{2n^3-3n^2+n}{n^3} = \frac{t^3}{6} \cdot 2 = \frac{t^3}{3}$

**7.11 Satz (Rechenregeln für Integrale)**

*$f, g$ Regelfunktionen auf $[a, b]$*

*a.) Linearität:* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

*b.) Positivität:* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

*c.)* $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

*d.) Sei $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$.*
$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

*e.) Intervall-Additivität:* $a \leq c \leq b$, *so* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

**7.12 Satz**

*Sei* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-c)^i$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius R,* $[a,b] \subseteq ]c-R, c+R[$

*Dann ist* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-c)^i$ *Regelfunktion auf* $[a,b]$ *und*

$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x-c)^i dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x-c)^i dx$

**7.13 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existiert ein* $c \in [a,b]$ *mit* $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

**Beweis** 5.9 : f nimmt Max und Min auf $[a,b]$ an, $m = f(x_{\min}), M = f(x_{\max})$

7.11d.): $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, $f(x_{\min}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_{\max})$

Zwischenwertsatz 5.8 sagt aus: $\exists c$ zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Angenommen: $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$\int_a^b f(x)dx = 0$, aber $f \neq 0 \Rightarrow$ geht dann nicht, falls f stetig. □

**7.14 Satz**

*Sei f stetig auf* $[a,b]$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$.
*f sei nicht die Nullfunktion.*
*Dann ist* $\int_a^b f(x)dx > 0$.

# Index