Mitschrieb der Vorlesung

Mathematik 2 für Informatiker und Bioinformatiker

Prof. Dr. Peter Hauck

Sommersemester 2007*

Mitschrieb in LaTeX von
ROUVEN WALTER

*Letzte Änderung: 7. März 2011

Lizenz

Vorwort

Dieser Mitschrieb entstand während meiner Nachbearbeitung zur Vorlesung „Mathematik 2 für Informatiker und Bioinformatiker" im Sommersemester 2007 bei Prof. Dr. Peter Hauck an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Bei Verständnisschwierigkeiten zum Inhalt empfehle ich daher ausdrücklich, sich an die jeweiligen Dozenten/Tutoren zu wenden.

Wer Fehler findet, Verbesserungsvorschläge hat oder mir sonstige Anregungen mitteilen möchte, kann mir gerne eine E-Mail an folgende Adresse schicken:
`rouvenwalter@web.de` oder
`kontakt@rouven-walter.de`

Inhaltsverzeichnis

1 Ringe und Körper

Im folgenden Kapitel werden die beiden algebraischen Konstrukte *Ringe* und *Körper* näher betrachtet, die die Konstrukte Halbgruppe und Monoide erweitern. Dabei handelt es sich um Mengen mit zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation, die durch das sogenannte *Distributivgesetz* in Beziehung stehen.

Definition 1.1. *Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) heißt* Ring*, falls folgendes gilt:*

1. $(R, +)$ *ist kommutative Gruppe.*
2. $(R, \cdot)$ *ist Halbgruppe.*
3. Distributivgesetz*:*

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a, b, c \in R \\
(a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in R
\end{aligned}
$$

Man beachte: Gilt für die multiplikative Verknüpfung die Kommutativität, so muss für das Distributivgesetz nur eine der beiden Gleichungen nachgewiesen werden. Die Gülitgkeit der anderen folgt dann.

Notationen:

Das neutrale Element bzgl. der Addition $+$ wird oft als 0 oder Nullelement bezeichnet.
Das Inverse bzgl. der Addition $+$ zu $x \in R$ wird mit $-x$ gekennzeichnet.
Statt $x + (-y)$ schreibt man auch $x - y$.

Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation $\cdot$ wird oft als 1 oder Einselement bezeichnet.
Das Inverse bzgl. der Multiplikation $\cdot$ zu $x \in R \setminus \{0\}$ wird mit x^{-1} gekennzeichnet.
Statt $a \cdot b$ schreibt man auch ab.

Satz 1.2. *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann gelten folgende Gleichungen für alle $x, y \in R$:*

$$
\begin{aligned}
0 \cdot x &= x \cdot 0 = 0 \\
x \cdot (-y) &= (-x) \cdot y = -(x \cdot y) \\
(-x) \cdot (-y) &= x \cdot y
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0+0) \cdot x \\ &\underset{Distr.-gesetz}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-(0 \cdot x)$, so

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot x + 0 \\ &= 0 \cdot x \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Mit $x \cdot 0 = 0$ analog.

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) + x \cdot y &\underset{Distr.-gesetz}{=} x \cdot (-y + y) \\ &= x \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-(x \cdot y)$, so

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

Mit $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ analog.

$$\begin{aligned} (-x) \cdot (-y) &= -(x \cdot (-y)) \\ &= -(-(x \cdot y)) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

□

Definition 1.3. *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.*

a) *$(R, +, \cdot)$ heißt* Ring mit Eins, *falls $(R, \cdot)$ ein Monoid ist.*
D.h. es existiert ein neutrales Element bzgl. $\cdot$, wobei $1 \neq 0$.

Ist $x \in R$ bzgl. $\cdot$ invertierbar, d.h. es existiert $x^{-1} \in R$ mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, so heißt x Einheit.

Die Menge aller Einheiten $R^* = \{x \in R : x \text{ ist Einheit}\}$ bildet eine Gruppe bzgl. $\cdot$.

b) *$(R, +, \cdot)$ heißt* kommutativer Ring, *falls $(R, \cdot)$ kommutative Halbgruppe ist. D.h. es gilt $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in R$.*

Bemerkung:

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Dann sind 1 und -1 Einheiten, denn $1 \cdot 1 = 1$ und $(-1) \cdot (-1) \underset{1.2}{=} 1$.
Es kann mehr Einheiten geben. Es kann auch $1 = -1$ gelten.
Nullelement 0 ist nie eine Einheit, denn es gilt $0 \cdot x \underset{1.2}{=} 0 \neq 1$ für alle $x \in R$.

Beispiel 1.4. *a)* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring mit Eins.*
Einheiten: $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring mit Eins.*
Einheiten: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. *Dann ist* $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ *ein kommutativer Ring mit Eins.*
Nach [Hau07] Satz 10.16 : $(Z_n, \oplus)$ *Gruppe und* $(Z_n, \odot)$ *Monoid.*

Nachweis der Gültigkeit des Distributivgesetzes: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, *so gilt:*

$$\begin{aligned}
a \odot (b \oplus c) &= (a \cdot (b \oplus c)) \mod n \\
&= (a \cdot (b + c \mod n)) \mod n \\
&\underset{\text{[Hau07], 6.13}}{=} (a \cdot (b + c)) \mod n \\
&\underset{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{Z}}{=} (a \cdot b + a \cdot c) \mod n \\
&\underset{\text{[Hau07], 6.13}}{=} ((a \cdot b \mod n) + (a \cdot c \mod n)) \mod n \\
&= (a \odot b) \oplus (a \odot c)
\end{aligned}$$

Dabei ist die Menge der Einheiten $Z_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n : \mathrm{ggT}(x, n) = 1\}$.

c) Seien $R_1, \ldots, R_n$ *Ringe. Das kartesische Produkt* $R_1 \times \ldots \times R_n$ *wird zum Ring: Seien* $a_i, b_i \in R$, *definiere Verknüpfungen wie folgt*

$$(a_1, \ldots, a_n) \dotplus (b_1, \ldots, b_n) \quad := \quad (a_1 \dotplus b_1, \ldots, a_n \dotplus b_n)$$

Bezeichnung: $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ *ist die* direkte Summe *der Ringe* $R_1, \ldots, R_n$.

Nullelement in $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$*:*

$$(\underbrace{0}_{\text{Nullelement in } R_1}, \ldots, \underbrace{0}_{\text{Nullelement in } R_n})$$

Additive Inverse zu $(a_1, \ldots, a_n)$ *ist* $(-a_1, \ldots, -a_n)$.
Sind die R_i *alle Ringe mit Eins, so auch* $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$. *Dabei ist das Einselement* $(1_{R_1}, \ldots, 1_{R_n})$.
Es gilt: $(a_1, \ldots, a_n)$ *ist bzgl. Multiplikation invertierbar* $\Leftrightarrow$ a_i *in* R_i *Einheit für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Die Menge der Einheiten: $(R_1 \oplus \ldots \oplus R_n)^* = R_1^* \times \ldots \times R_n^*$.
Sind alle R_i *kommutativ, so auch* $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$.

Konkretes Beispiel:

Seien $R_1 = \mathbb{Z}_2$, $R_2 = \mathbb{Z}_3$. *Dann gilt*
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$.
Exemplarische Verknüpfung von Elementen aus $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ *:*

$$\begin{aligned}
(0,2) \oplus (1,2) &= (1,1) \\
(1,1) \oplus (1,2) &= (0,0)
\end{aligned}$$

d) Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring, $M \neq \emptyset$ eine Menge. Definiere auf $R^M := \{f|\ f : M \to R\}$ folgende zwei Verknüpfungen: Sei $f, g \in R^M$, definiere $f+g$ und $f \cdot g$ durch

$$f \dot{+} g \quad : \quad \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto (f \dot{+} g)(m) := f(m) \dot{+} g(m) \end{cases}$$

Dadurch wird R^M Ring. Ist R kommutativ, so auch R^M. Hat R ein Einselement, so auch R^M. Dabei ist das Einselement in R^M dann:

$$\begin{aligned} i \quad &: \quad \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto i(m) = 1 \end{cases} \\ f \cdot i \quad &= \quad i \cdot f \\ &= \quad f \qquad \forall f \in R^M \end{aligned}$$

Nullelement in R^M:

$$\begin{aligned} \sigma \quad &: \quad \begin{cases} M \to R \\ m \mapsto \sigma(m) = 0 \end{cases} \\ f + \sigma \quad &= \quad \sigma + f \\ &= \quad f \qquad \forall f \in R^M \end{aligned}$$

Angenommen $M = \{1, \ldots, n\}$. Dann lässt sich jede Abbildung $f : M \to R$ eindeutig beschreiben durch

$$(f(1), \ldots, f(n)) \in R \oplus \underbrace{\ldots}_{\leftarrow n \rightarrow} \oplus R$$

Der Ring R^M ist dann dasselbe wie der Ring $R \oplus \underbrace{\ldots}_{\leftarrow n \rightarrow} \oplus R$.

Satz 1.5. *Sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring, seien $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i}$$

Wobei

$$\begin{aligned} a^0 \cdot b^n \quad &= \quad b^n \\ a^n \cdot b^0 \quad &= \quad a^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a^i \quad &= \quad a \cdot \underbrace{\ldots}_{\leftarrow i \rightarrow} \cdot a \\ \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} \quad &= \quad a^i \cdot b^{n-i} + \underbrace{\ldots}_{\leftarrow \binom{n}{i} \rightarrow} + a^i \cdot b^{n-i} \end{aligned}$$

Beweis. Wie in [Hau07], 7.15. □

Definition 1.6. *Ein kommutativer Ring* $(K, +, \cdot)$ *mit Eins heißt* Körper*, wenn jedes Element* $\neq 0$ *bzgl. der Multiplikation invertierbar ist, d.h.* $K^* = K \setminus \{0\}$*.*
D.h. $K^* = K \setminus \{0\}$ *bildet kommutative Gruppe bzgl. der Multiplikation.*

Beispiel 1.7. a) *Die Mengen* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *mit der normalen Addition und Multiplikation sind Körper.*
Die Menge $\mathbb{Z}$ *mit der normalen Addition und Multiplikation ist kein Körper, da z.B. das Element 5 kein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzt.*

b) *Wenn* $K_1, \ldots, K_n$ *Körper sind,* $n \geq 2$*, so ist* $K_1 \oplus \ldots \oplus K_n$ *kein Körper.*
Denn $(1, 0, \ldots, 0)$ *ist nicht invertierbar bzgl. der Multiplikation.*

Satz 1.8. *Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper und seien* $x, y \in K$*.*
Ist $x \cdot y = 0$*, so ist* $x = 0$ *oder* $y = 0$*.*

Beweis. Seien $x, y \in K$. Angenommen die Behauptung gelte nicht, dann sind $x, y \neq 0$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot y \\ x^{-1} \cdot 0 &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) \\ 0 &\underset{1.2}{=} y \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu Annahme. □

Beispiel

Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot) = \{0, 1, 2, 3\}$.
Es gilt $2 \odot 2 = 0$, aber $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ ist kein Körper, da 2 kein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzt.

Satz 1.9. *Sei* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*. Dann gilt:* $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ *ist Körper* $\Leftrightarrow$ n *ist Primzahl.*

Beweis. $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n \text{ ist Körper} &\Leftrightarrow \mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \\ &\underset{1.4}{\Leftrightarrow} \operatorname{ggT}(x, n) = 1 \text{ für alle } 1 \leq x \leq n-1 \\ &\Leftrightarrow n \text{ Primzahl} \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Es gilt $|\mathbb{Z}_p| = p$. Körper $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ sind für die Informatik besonders wichtig.
Speziell $p = 2$: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, Körper der Bits.

Definition 1.10. *a) Seien* $(R, +_R, \cdot_R), (R', +_{R'}, \cdot_{R'})$ *Ringe. Die Abbildung* $\varphi : R \to R'$ *heißt* (Ring-)Homomorphismus*, falls gilt:*

$$\begin{aligned} \varphi(a +_R b) &= \varphi(a) +_{R'} \varphi(b) \qquad \forall a, b \in R \\ \varphi(a \cdot_R b) &= \varphi(a) \cdot_{R'} \varphi(b) \qquad \forall a, b \in R \end{aligned}$$

b) Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus*.*

c) Existiert Isomorphismus $\varphi : R \to R'$*, so nennen wir* R *und* R' isomorph*. Dies kennzeichnen wir durch* $R \cong R'$*.*

Beispiel 1.11. *a) Die Abbildung* φ *mit*

$$\varphi \ : \ \begin{cases} (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot) \\ x \mapsto x \mod n \end{cases}$$

ist ein Ringhomomorphismus.

Zu zeigen:
$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \qquad \forall a, b \in R,$
$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) \qquad \forall a, b \in R.$

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ *beliebig. Es gilt:*

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= (a + b) \mod n \\ &\underset{\text{[Hau07], 6.13}}{=} (a \mod n + b \mod n) \mod n \\ &= \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= (a \cdot b) \mod n \\ &\underset{\text{[Hau07], 6.13}}{=} (a \mod n \cdot b \mod n) \mod n \\ &= \varphi(a) \odot \varphi(b) \end{aligned}$$

b) Sei $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \in \mathbb{N}$*, wobei* $n_i \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$*, für alle* $i, j = 1, \ldots, k$*,* $i \neq j$*. Wie betrachten die Abbildung* ψ *mit:*

$$\psi \ : \ \begin{cases} \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \\ x \mapsto (x \mod n_1, \ldots, x \mod n_k) \end{cases}$$

Beispiel:
Sei $n = 18$*,* $n_1 = 9$*,* $n_2 = 2$*.*
Sei $x \in \mathbb{Z}_{18}$*,* $x \mapsto (x \mod 9, x \mod 2)$*.*
$\psi(13) = (4, 1)$

Dann ist ψ *ein Ring-Isomorphismus:*
Abbildung ψ *ist ein Ring-Homomorphismus: Folgt wie in a).*

Abbildung ψ ist injektiv: Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$.
Zu zeigen: $\psi(x) = \psi(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$.
Sei O.B.d.A $x \geq y$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& \psi(x) = \psi(y) \\
\Leftrightarrow \quad & (x \mod n_1, \ldots, x \mod n_k) = (y \mod n_1, \ldots, y \mod n_k) \\
\Leftrightarrow \quad & x \mod n_i = y \mod n_i \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \\
\Leftrightarrow \quad & n_i | x - y \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \\
\underset{\substack{\mathrm{ggT}(n_i, n_j)=1 \\ \text{[Hau07], 6.20 c)}}}{\Leftrightarrow} \quad & n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k | x - y \\
\underset{0 \leq x-y<n}{\Leftrightarrow} \quad & x - y = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = y
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{Z}_n| &= n \\
|\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}| &= |\mathbb{Z}_{n_1}| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{Z}_{n_k}| \\
&= n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \\
&= n
\end{aligned}$$

Da ψ injektiv ist und $|\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}|$ gilt, folgt die Bijektivität für ψ.

Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Dann $(a_1 \mod n_1, \ldots, a_k \mod n_k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$.
Weil ψ bijektiv ist, existiert genau ein $x \in \mathbb{Z}_n$ mit

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (a_1 \mod n_1, \ldots, a_k \mod n_k) \\
&= (x \mod n_1, \ldots, x \mod n_k)
\end{aligned}$$

D.h. $x \mod n_i = a_i \mod n_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
D.h. $x \equiv a_1 \pmod{n_1}$,..., $x \equiv a_k \pmod{n_k}$.
Chinesischer Restsatz ([Hau07], 6.30), nicht-konstruktiver Existenzbeweis.

Bemerkung: Euler'scher φ-Funktion

Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &:= |\{x : x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq n,\ \mathrm{ggT}(x, n) = 1\}| \\
|\mathbb{Z}_n^*| &= \varphi(n) \\
a^{\varphi(n)} &\equiv 1 \pmod n \qquad \text{falls } \mathrm{ggT}(a, n) = 1 \qquad \text{(Satz von Euler)}
\end{aligned}$$

Korollar 1.12. *Sei $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für alle $i, j = 1, \ldots, k$ mit $i \neq j$. Dann gilt:*

$$\varphi(n) = \varphi(n_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_k)$$

Insbesondere:
Ist $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, $a_i > 0$, p_i *Primzahlen,* $p_i \neq p_j$ *für* $i \neq j$, *dann ist:*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i - 1} \cdot (p_i - 1)$$

Beweis. Die Abbildung $\psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ aus 1.11 ist ein Isomorphismus.
Abbildung $\psi' : \mathbb{Z}_n^* \to (\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k})^* = \mathbb{Z}_{n_1}^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}^*$ ist bijektiv. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= |\mathbb{Z}_n^*| \\ &= |\mathbb{Z}_{n_1}^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}^*| \\ &= \varphi(n_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_k) \end{aligned}$$

Sei p Primzahl, $a \in \mathbb{N}$, so

$$\varphi(p^a) = p^{a-1} \cdot (p-1)$$

Denn es gilt für $1 \leq x \leq p^a : \text{ggT}(x, p^a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \not| x$.
p^{a-1} Zahlen zwischen 1 und p^a sind durch p teilbar.
$p^a - p^{a-1} = p^{a-1} \cdot (p-1)$ sind nicht durch p teilbar. □

Definition 1.13. *a) Ein* Polynom *über dem Körper* K *ist ein Ausdruck* $f = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, *wobei* $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$.

Die Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *heißen* Koeffizienten *von* f.

Ist $a_1 = 0$, *so kann man* $0 \cdot x^i$ *bei der Beschreibung von* f *weglassen.*
Beispiel: $2 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 = 2 + 3 \cdot x^2$.

Statt $a_0 \cdot x^0$ *schreibt man* a_0.
Die Terme $a_i \cdot x^i$ *heißen* Monome. *Am Polynom ändert sich nichts, wenn man die Reihenfolge der Monome vertauscht. Beispiel:* $1 + x^2 + 7 \cdot x^3 = x^2 + 7 \cdot x^3 + 1$.
Ist $a_i = 1$, *so schreibt man* x^i *statt* $1 \cdot x^i$.
Man schreibt für ein Polynom f *auch* $f = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \cdot x^i$, *wobei ein* $n = n(f) \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $a_i = 0$ *für alle* $i > n$.

b) Zwei Polynome $f = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \cdot x^i$ *(*$a_i = 0$ *für* $i > n$*) und* $g = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} b_i \cdot x^i$ *(*$b_i = 0$ *für* $i > n$*) heißen gleich, falls* $a_i = b_i$ *für alle* $i \in \mathbb{N}_0$.

c) Das Polynom, dessen sämtliche Koeffizienten gleich 0 sind, heißt Nullpolynom.

d) Die Menge aller Polynome über K *wird mit* $K[x]$ *bezeichnet.*

Satz 1.14. *Sei* K *ein Körper. Die Menge* $K[x]$ *wird zu einem kommutativen Ring mit Eins durch folgende Verknüpfungen:*
Seien $f, g \in K[x]$ *mit*

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \cdot x^i \qquad (a_i = 0 \text{ für } i > n)\\
g &= \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x^i\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i \cdot x^i \qquad (b_i = 0 \text{ für } i > n)
\end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned}
f+g &:= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) \cdot x^i\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}_0} (a_i + b_i) \cdot x^i
\end{aligned}$$

$$f \cdot g := \sum_{i=0}^{n+m} c_i \cdot x^i$$

wobei

$$c_i := \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} \cdot b_k$$

bzw.

$$c_i = \sum_{\substack{(j,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\\ j+l=i}} a_j \cdot b_l \qquad \text{Faltungsprodukt}$$

Alle a_i *mit* $i > n$ *und alle* b_j *mit* $j > m$ *sind* 0 *zu setzen.*

Das Nullelement ist das Nullpolynom 0*. Das Einselement ist das konstante Polynom* $1 = 1 \cdot x^0$.

Wir nennen $K[x]$ Polynomring *(in einer Variablen) über* K.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel:

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^3 + 2x + 1 \quad \in \mathbb{Q}[x]\\
g(x) &= 2x^2 - 3x + 2 \quad \in \mathbb{Q}[x]\\
f(x) + g(x) &= 4x^3 + 2x^2 - x + 3 \quad \in \mathbb{Q}[x]\\
f(x) \cdot g(x) &= (4x^3 + 2x + 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2)\\
&= 8x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 12x^4 - 6x^2 - 3x + 8x^3 + 4x + 2\\
&= 8x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 4x^2 + x + 2 \quad \in \mathbb{Q}[x]
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.15. *a) Für die Multiplikation gilt:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n \\ x \cdot f(x) &= a_0 \cdot x + a_1 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

b) Das Pluszeichen in der Beschreibung von Polynomen entspricht genau der obig definierten additiven Verknüpfung der Monome $a_0 \cdot x^0, a_1 \cdot x^1, \ldots, a_n \cdot x^n$.

Definition 1.16. *Sei K ein Körper. Sei $0 \neq f \in K[x]$, $f = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \cdot x^i$. Dann heißt das größte n mit $a_n \neq 0$ der* Grad *von f, bezeichnet als* $\mathrm{grad}(f)$.

Konstante Polynome (außer dem Nullpolynom) besitzen den Grad 0.
Der Grad des Nullpolynoms setzen wir auf $-\infty$.

Bemerkung 1.17. *a) Sei K Körper. Jedes Polynom f in $K[x]$ ist eindeutig durch seine Koeffizienten bestimmt:*
Die Abbildung $f \to (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, wobei $a_i = 0$ für $i > \mathrm{grad}(f)$, bildet Folge mit unendlichem Träger.

Beispiel: Polynom $x \to (0, 1, 0, \ldots)$. Für die Multiplikation gilt:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) &= (c_0, c_1, \ldots) \\ c_i &= \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} \cdot b_k \end{aligned}$$

b) Die Menge der konstanten Polynome (einschließlich 0) bilden Unterring von $K[x]$, der zu K isomorph ist.

Satz 1.18. *Sei K ein Körper. Seien $f, g \in K[x]$. Dann gilt:*

$$\mathrm{grad}(f \cdot g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$$

(Konvention: $-\infty + -\infty = -\infty + n = -\infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0$)

Beweis. Richtig, falls $f = 0$ oder $g = 0$.
Sei $n = \mathrm{grad}(f)$, $m = \mathrm{grad}(g)$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$. Bei x^{n+m} steht in $f \cdot g$ der Koeffizient $a_n \cdot b_m$. Da $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$, gilt mit 1.8 $a_n \cdot b_n \neq 0$. Höhere Potenzen mit Koeffizient $\neq 0$ treten in $f \cdot g$ nicht auf. Also gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(f \cdot g) &= n + m \\ &= \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g) \end{aligned}$$

□

Korollar 1.19. *Sei K ein Körper. Die Einheiten in $K[x]$ sind genau die konstanten Polynome* $\neq 0$.

Beweis. Sei $f = a_0$, wobei $a_0 \neq 0$. So ist das inverse Polynom $f^{-1} = a_0^{-1}$, denn a_0 ist in K invertierbar. Damit gilt $f \cdot f^{-1} = 1$.

Sei f invertierbar, so existiert $f^{-1} \in K[x]$ mit $f \cdot f^{-1} = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{grad}(1) \\ &= \operatorname{grad}(f \cdot f^{-1}) \\ &\underset{1.18}{=} \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(f^{-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = 0$, d.h. f ist konstantes Polynom $\neq 0$. □

Definition 1.20. *Sei K ein Körper. Sei $b \in K$. Die Abbildung*

$$\varphi_b \quad : \quad \begin{cases} K[x] \to K \\ f = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i \mapsto f(b) := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i \end{cases}$$

ist ein Homomorphismus, der sogenannte Auswertungshomomorphismus.

Wie schnell lässt sich $f(b)$ berechnen?
b, b^2, b^3,..., b^n ergeben $n-1$ Multiplikationen.
Multiplikationen mit a_i ergeben n Multiplikationen.
Somit insgesamt $2 \cdot n - 1$ Multiplikationen und n Additionen.

Eine schnellere Methode liefert das Horner-Schema*:*

$$f(b) \quad = \quad a_0 + b \cdot (a_1 + b \cdot (a_2 + \ldots + b \cdot (a_{n-1} + b \cdot a_n) \ldots))$$

Somit erhält man n Multipliaktionen und n Additionen.

Definition 1.21. *Sei K ein Körper. Seien $f, g \in K[x]$. Wir sagen f* teilt *g, notiert durch $f|g$, falls ein $q \in K[x]$ existiert mit $g = q \cdot f$.*

Man beachte, dass mit 1.18 gilt $\operatorname{grad}(f) \leq \operatorname{grad}(g)$.

Satz 1.22. *Sei K ein Körper. Seien $0 \neq f \in K[x]$, $g \in K[x]$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ mit:*

(1) $g = q \cdot f + r$

(2) $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(f)$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} r &:= g \mod f \\ q &:= g \operatorname{div} f \end{aligned}$$

Beweis. Ein exakter Beweis kann unter [WHK04] Satz 4.69 nachgelesen werden. □

Beispiel 1.23. *a) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $g = x^4 + 2x^3 - x + 2$ und $f = 3x^2 - 1$. Dann erhält man mittels Polynomdivison:*

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \\ r &= -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{aligned}$$

b) Seien $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit $g = 2x^3 + 2x^2 + 1$, $f = x^2 + 2$. Dann erhält man mittels Polynomdivision:

$$\begin{aligned} q &= 2x + 2 \\ r &= 2x \end{aligned}$$

Satz 1.24. *(Leerer Eintrag, wurde aus Nummerierungsgründen beibehalten)*

Korollar 1.25. *Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$. Dann gilt:*

$$(x - a) \mid f \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Angenommen $(x - a)|f$, d.h. $f = q \cdot (x - a)$ für ein $q \in K[x]$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} f(a) &= q(a) \cdot (a - a) \\ &= q(a) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Es gelte $f(a) = 0$. Die Division mit Rest von f durch $(x-a)$ ergibt $f = q\cdot(x-a)+r$, wobei $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - a) = 1$. Also gilt $r \in K$ und damit:

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) \\ &= q(a) \cdot (a - a) + r(a) \\ &= 0 + r \\ &= r \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (x - a)|f$. □

Bemerkung 1.26. *a) Sei K ein Körper. Seien $f, g \in K[x]$. Angenommen es gelte $f|g$. Sei $0 \neq a \in K$. Dann gilt $(a \cdot f)|g$ und $f|(a \cdot g)$.*

Beweis. Angenommen es gelte $f|g$, dann existiert ein $q \in K[x]$ mit:

$$\begin{aligned} g &= q \cdot f \\ &= (a^{-1} \cdot q) \cdot (a \cdot f) \\ a \cdot g &= (a \cdot q) \cdot f \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a \cdot f)|g$ und $f|(a \cdot g)$. □

Beispiel:

Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ *mit* $f = x + 1$, $g = x^2 - 1$, *so* $f|g$, *da*

$$\begin{aligned} g &= x^2 - 1 \\ &= (x-1) \cdot (x+1) \\ &= (x-1) \cdot f \end{aligned}$$

Es gilt $2 \cdot f|g$, *da:*

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 \cdot x + 2)$$

b) *Sei* K *ein Körper. Sei* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in K[x]$ *mit* $a_n \neq 0$, *so ist:*

$$a_n^{-1} \cdot f = 1 \cdot x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_n^{-1} \cdot a_i \cdot x^i$$

Höchster Koeffizient von $a_n^{-1} \cdot f$ *ist* 1.
Ein Polynom, dessen höchster von Null verschiedener Koeffizient gleich 1 ist, heißt normiert.

Mit Teil a) gilt:

$$\begin{aligned} f|g &\Leftrightarrow a_n^{-1} \cdot f|g \\ g|f &\Leftrightarrow g|a_n^{-1} \cdot f \end{aligned}$$

Definition 1.27. *Sei* K *ein Körper.*

a) *Seien* $g, h \in K[x]$, *nicht beide gleich 0.*
Das Polynom $f \in K[x]$ *heißt* größter gemeinsamer Teiler *von* g *und* h, *falls* f *normiertes Polynom maximalen Grades ist, das sowohl* g *als auch* h *teilt.*

b) *Seien* $g, h \in K[x] \setminus \{0\}$.
Das Polynom $f \in K[x]$ *heißt* kleinstes gemeinsames Vielfaches *von* g *und* h, *falls* $f \neq 0$ *normiertes Polynom minimalen Grades ist, das sowohl von* g *und* h *geteilt wird.*

Bemerkung 1.28. a) *Das kleinste gemeinsame Vielfache von* g *und* h *existiert und ist eindeutig bestimmt.*

Existenz:
Es gilt $g|g \cdot h$ *und* $h|g \cdot h$. *Jedes gemeinsame Vielfaches von* g *und* h *hat* $\mathrm{grad} \geq \max(\mathrm{grad}(g), \mathrm{grad}(h))$. *Es gibt gemeinsames Vielfaches von* $\mathrm{grad}(g) + \mathrm{grad}(h)$. *Nur endlich viele Möglichkeiten für Grad zwischen* $\max(\mathrm{grad}(g), \mathrm{grad}(h))$ *und* $\mathrm{grad}(g) + \mathrm{grad}(h)$. *Somit gibt es ein kleinstes gemeinsames Vielfaches.*

Eindeutigkeit:
Angenommen es gebe zwei kleinste gemenisame Vielfache f_1 und f_2. Dann gilt $g,h|f_1$ und $g,h|f_2$. Die Polynome f_1, f_2 sind normiert und haben gleichen (minimalen) Grad. Es gilt: $g|f_1 - f_2$ und $h|f_1 - f_2$. Weil f_1, f_2 normiert sind und vom gleichen Grad, gilt $grad(f_1 - f_2) < \mathrm{grad}(f_1) = \mathrm{grad}(f_2)$. D.h. $f_1 - f_2 = 0$, $f_1 = f_2$.

b) *Größter gemeinsamer Teiler existiert. Eindeutigkeit folgt aus dem nachfolgenden Satz von Bézout.*

Satz 1.29. *Satz von Bézout[1]: Sei K ein Körper. Seien $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0. Ist f ein größter gemeinsamer Teiler von g und h, so existieren $s, t \in K[x]$ mit*

$$f = s \cdot g + t \cdot h$$

Korollar 1.30. *Sei K ein Körper und seien $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0.*

a) *Der größte gemeinsame Teiler von g und h ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen ihn mit Bezeichnung $\mathrm{ggT}(g, h)$.*

b) *Ist $d \in K[x]$ mit $d|g$ und $d|h$, so gilt $d|\mathrm{ggT}(g, h)$.*

Beweis. a) Angenommen $f, f' \in K[x]$ seien normierte Polynome von maximalen Grad mit $f|g, h$ und $f'|g, h$. Mit 1.29 gilt: $f' = s' \cdot g + t' \cdot h$, für $s', t' \in K[x]$. D.h. $f|f'$. $f' = q \cdot f$ für ein $q \in K[x]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(f') &= \mathrm{grad}(q \cdot f) \\ &= \mathrm{grad}(q) + \mathrm{grad}(f)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{grad}(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad q \in K[x] \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad q \in K$ mit $f' = q \cdot f$.
Die Polynome f, f' haben den gleichen Grad und sind normiert. Also $q = 1$ und damit $f' = f$.

b) Folgt aus 1.29.

□

Satz 1.31. *Euklidischer Algorithmus in $K[x]$: Sei K ein Körper. Der nachfolgende Algorithmus liefert den $\mathrm{ggT}(g, h)$ zweier Polynome $g, h \in K[x]$, die nicht beide gleich 0 sind.*

```
Input(g, h)
if h = 0 then
    z ← g
end if
if h/g then
    z ← h
end if
```

[1] Étienne Bézout war ein französischer Mathematiker (1730 - 1783).

if $h \neq 0 \quad \wedge \quad h \not| g$ ***then***
  $y \leftarrow g, \quad z \leftarrow h$
  for $y \mod z \neq 0$ ***do***
    $r \leftarrow y \mod z, \quad y \leftarrow z, \quad z \leftarrow r$
  end for
end if
$d \leftarrow a_n^{-1} \cdot z$ *, wobei* a_n *höchster Koeffizient* $! = 0$ *von* z
Output(d)

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}$.
Es gilt: $d|g$ und $d|h \Leftrightarrow d|g \mod h$ und $d|h$, denn $g = q \cdot h + r = q \cdot h + (g \mod h)$.
Der Algorithmus terminiert und es gilt $\mathrm{grad}(g \mod h) < \mathrm{grad}(h)$. □

Satz 1.32. *Sei K ein Körper und seien $g, h \in K[x]$, nicht beide gleich 0. Der folgende Algorithmus bestimmt Polynome $s, t \in K[x]$ mit $\mathrm{ggT}(g, h) = s \cdot g + t \cdot h$.*

Input(g, h)
if $h = 0$ ***then***
  $z \leftarrow g, \quad s \leftarrow 1, \quad t \leftarrow 0$
end if
if $h|g$ ***then***
  $z \leftarrow h, \quad s \leftarrow 0, \quad t \leftarrow 1$
end if
if $h \neq 0 \quad \wedge \quad h \not| g$ ***then***
  $y \leftarrow g, \quad g \leftarrow h$
  $s_1 \leftarrow 1, \quad s_2 \leftarrow 0, \quad s \leftarrow 0$
  $t_1 \leftarrow 0, \quad t_2 \leftarrow 1, \quad t \leftarrow 1$
  while $y \mod z \neq 0$ ***do***
    $q \leftarrow (y \operatorname{div} z), \quad r \leftarrow (y \mod z)$
    $s \leftarrow (s_1 - q \cdot s_2), \quad t \leftarrow (t_1 - q \cdot t_2)$
    $s_1 \leftarrow s_2, \quad s_2 \leftarrow s, \quad t_1 \leftarrow t_2, \quad t_2 \leftarrow t$
    $y \leftarrow z, \quad z \leftarrow r$
  end while
end if
$z \leftarrow s \cdot g + t \cdot r$
$d \leftarrow a_n^{-1} \cdot z$ *, wobei* a_n *höchster Koeffizient* $! = 0$ *von* z
$s \leftarrow a_n^{-1} \cdot s, \quad t \leftarrow a_n^{-1} \cdot t$
Output(s, t, d)

Beweis. Der Beweis folgt analog zum Beweis des Erweiterten Euklidischen Algorithmus über $\mathbb{Z}$ in [Hau07], Satz 6.17 und 6.18 oder in [WHK04]. □

Beispiel 1.33. *Seien $g = x^4 + x^3 + 2 \cdot x^2 + 1$ und $h = x^3 + 2 \cdot x^2 + 2$ Polynome in $\mathbb{Z}_3[x]$.*

Die Anwendung des Erweiterten Euklidischen Algorithmus liefert:

$y \mod z$	y	z	s_1	s_2	s	t_1	t_2	t	q	r
	g	h	1	0	0	0	1	1		
x^2+x	h	x^2+x	0	1	1	1	$2\cdot x+1$	$2\cdot x+1$	$x+2$	x^2+x
$2\cdot x+2$	x^2+x	$2\cdot x+2$	1	$2\cdot x+2$	$2\cdot x+2$	$2\cdot x+1$	x^2	x^2	$x+1$	$2\cdot x+2$
0										

Dabei gilt: $\operatorname{ggT}(g,h) = x+1, \quad s = x+1, \quad t = 2\cdot x^2$. *Proberechnung:*

$$\begin{aligned} & s\cdot g + t\cdot h \\ = \; & (x+1)\cdot(x^4+x^3+2\cdot x^2+1) + (2\cdot x^2)\cdot(x^3+2\cdot x^2+2) \\ = \; & (x^5+x^4+2\cdot x^3+x) + x^4+x^3+2\cdot x^2+1+2\cdot x^5+x^4+x^2 \\ = \; & x+1 \\ = \; & \operatorname{ggT}(g,h) \end{aligned}$$

Satz 1.34. *Sei K ein Körper und sei $0 \neq f \in K[x]$ mit $\operatorname{grad}(f) = n$. Sei $K[x]_n := \{g \in K[x] : \operatorname{grad}(g) < n\}$.*

Ist $n \geq 1$, so ist $(K[x]_n, +, \odot_f)$ ein kommutativer Ring mit Eins, wobei $+$ die normale Addition von Polynomen ist und $\odot_f$ definiert ist durch:

$$g \odot_f h \;:=\; (g\cdot h) \mod f$$

Beweis. Der Beweis beruht auf der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} (g+h) \mod f &= ((g \mod f) + (h \mod f)) \mod f \\ (g\cdot h) \mod f &= ((g \mod f)\cdot(h \mod f)) \mod f \end{aligned}$$

Der Rest ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel 1.35. *Sei $f = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ und sei $\mathbb{R}[x]_2 = \{a\cdot x+b : a,b \in \mathbb{R}\}$. Wir betrachten $(\mathbb{R}[x]_2, +, \odot_f)$. Dann gilt beispielsweise:*

$$\begin{aligned} (a\cdot x+b)+(c\cdot x+d) &= (a+c)\cdot x+(b+d) \\ (a\cdot x+b)\odot_f(c\cdot x+d) &= (a\cdot x+b)\cdot(c\cdot x+d) \mod f \\ &= (a\cdot c\cdot x^2+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot x+b\cdot d) \mod f \\ &= -a\cdot c+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot x+b\cdot d \\ &= (a\cdot d+b\cdot c)\cdot x+(b\cdot d-a\cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \mod f &= ((x^2+1)-1) \mod (x^2+1) \\ &= -1 \\ x\odot_f x &= x\cdot x \mod f \\ &= x^2 \mod f \\ &= -1 \end{aligned}$$

Definition 1.36. *Sei K ein Körper. Ein Polynom $f \in K[x]$ mit* grad ≥ 1 *(d.h. $f \neq 0$ und f ist keine Einheit) heißt* irreduzibel*, falls gilt:*
Ist $f = g \cdot h$, für $g, h \in K[x]$, so ist $\text{grad}(g) = 0$ *oder* $\text{grad}(h) = 0$ *(d.h. g oder h ist Konstante).*

Man beachte: Seien $f, a \in K \setminus \{0\}$, dann ist die Gleichung $f = a \cdot (a^{-1} \cdot f)$ immer gültig.

Beispiel:

Wir betrachten $K[x] = \mathbb{Q}[x]$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+1) \cdot (x-1) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

D.h. $x^2 - 1$ ist kein irreduzibles Polynom.
Irreduzible Polynome in $K[x]$ entsprechen Primzahlen.

Beispiel 1.37. *a) Das Polynom $a \cdot x + b \in K[x]$ mit $a \neq 0$, ist irreduzibel in $K[x]$ für jeden Körper K:*
Ist $a \cdot x + b = g \cdot h$ für $g, h \in K[x]$, so gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \text{grad}(a \cdot x + b) \\ &= \text{grad}(g \cdot h) \\ &= \text{grad}(g) + \text{grad}(h) \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\text{grad}(g) = 0$ *oder* $\text{grad}(h) = 0$.

b) Das Polynom $x^2 + x + 5 \in \mathbb{R}[x]$ ist irreduzibel:
Angenommen $x^2 + x + 5 = (a \cdot x + b) \cdot (c \cdot x + d)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot c = 1$.
Polynom $a \cdot x + b$ hat Nullstelle $-\frac{b}{a} = -a^{-1} \cdot b \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Polynom $x^2 + x + 5$ hat Nullstelle $-a^{-1} \cdot b \in \mathbb{R}$.
Aber: $x^2 + x + 5$ hat keine reellen Nullstellen, da die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{19}{20}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Widerspruch zur Annahme, d.h. $x^2 + x + 5$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.

c) Sei $f = x^2 + x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Das Polynom f hat Nullstelle 1 in $\mathbb{Z}_7$. Mit 1.25 folgt: $(x-1) = (x+6) \in \mathbb{Z}_7[x]$ teilt f. Polynomdivision ergibt: $x^2+x+5 = (x+6)\cdot(x+2)$.
Nullstellen: $-6 = 1$ und $-2 = 5$.
$\Rightarrow$ Polynom f ist nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}_7[x]$.

Satz 1.38. *Sei K ein Körper. Sei $f \in K[x]$ mit* $\text{grad}(f) \geq 1$. *Dann sind äquivalent:*

(1) f ist irreduzibel

(2) $f | g \cdot h \quad \Rightarrow \quad f | g \ \vee \ f | h$

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei f irreduzibel und es gelte $f|g \cdot h$. Angenommen $f \not| g$. Dann ist $\text{ggT}(f, g) = 1$. Mit 1.29 gilt: $\exists s, t \in K[x] : 1 = s \cdot f + t \cdot g$. Multiplizieren mit h: $h = s \cdot f \cdot h + t \cdot g \cdot h$. Also $f|s \cdot f \cdot h$ und $f|t \cdot g \cdot h$. Daraus folgt: $f|s \cdot f \cdot h + t \cdot g \cdot h = h$.

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Angenommen $f = g \cdot h$. Daraus folgt $f|g \cdot h$. Daraus folgt mit (2) $f|g$ oder $f|h$. Es gelte O.B.d.A. $f|g$, so folgt:

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &\leq \text{grad}(g) \\ &\leq \text{grad}(g) + \text{grad}(h) \\ &= \text{grad}(g \cdot h) \\ &= \text{grad}(f) \end{aligned}$$

Es muss also überall Gleichheit gelten. Somit gilt $\text{grad}(h) = 0$ und f ist irreduzibel. □

Korollar 1.39. *Sei K ein Körper, sei $f \in K[x]$ mit $\text{grad}(f) = n \geq 1$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K. Dabei ist ein Element $a \in K$ eine Nullstelle von f, falls gilt $f(a) = 0$.*

Beweis. Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.
IA: $n = 1$. Es gilt: $f = a \cdot x + b$, $a \neq 0$, f hat genau eine Nullstelle, nämlich $-a^{-1} \cdot b$.
IS: $n > 1$.
Hat f keine Nullstelle, so fertig.

Angenommen f hat Nullstelle $c \in K$, so folgt mit 1.25: $f = (x - c) \cdot g$, $\text{grad}(g) = n - 1$.
Angenommen f hat weitere Nullstelle $d \neq c$, $d \in K$. So folgt mit 1.25: $(x - d)|f = (x - c) \cdot g$. Dabei ist $(x - d)$ nach 1.37 a) ein irreduzibles Polynom.
Weiter folgt mit 1.38: $(x - d)|(x - c)$ oder $(x - c)|g$. Weil $d \neq c$ ist, folgt $(x - d) \not|(x - c)$.
Damit $(x - d)|g$. Mit 1.25 gilt: d ist Nullstelle von g. Per Induktion: g hat höchstens $n-1$ Nullstellen in K. Also: f hat höchstens $n-1$ Nullstellen $\neq c$ in K. Die Behauptung folgt. □

Satz 1.40. *Sei K ein Körper. Sei f ein Polynom von Grad $n \geq 1$ in $K[x]$. Dann sind äquivalent:*

(1) Polynom f ist irreduzibel

(2) $(K[x]_n, +, \odot_f)$ ist Körper

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Sei f irreduzibel. Mit 1.34 folgt $(K[x]_n, +, \odot_f)$ ist kommutativer Ring mit Eins. Es bleibt zu zeigen: Existenz von Inversen für $0 \neq g \in K[x]_n$ bzgl. $\odot_f$.
Sei $g \in K[x]$ mit $g \neq 0$. Es gilt $\text{ggT}(f, g) = 1$, denn f ist irreduzibel und $f \not| g$, da $\text{grad}(g) < \text{grad}(f)$, $g \neq 0$.
Nach 1.29 gilt: $\exists s, t \in K[x] : s \cdot f + t \cdot g = 1$. Dann: $g^{-1} = t \mod f$, wobei $t \mod f \in K[x]_n$, denn es gilt:

$$(t \mod f) \odot_f g = ((t \mod f) \cdot g) \mod f$$

$$
\begin{aligned}
&= (t \cdot g) \mod f \\
&= (1 - s \cdot f) \mod f \\
&= 1
\end{aligned}
$$

„(2) $\Rightarrow$ (1)“: Sei $(K[x]_n, +, \odot_f)$ ein Körper. Angenommen $f = g \cdot h$, $\mathrm{grad}(g) > 0$, $\mathrm{grad}(h) > 0$ für $g, h \in K[x]_n$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{g}_{\neq 0} \odot_f \underbrace{h}_{\neq 0} &= (g \cdot h) \mod f \\
&= f \mod f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Mit 1.8 gilt: $(K[x]_n, +, \odot_f)$ kein Körper. $\square$

Korollar 1.41. *Ist p Primzahl, f irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{Z}_p[x]$, so ist $(\mathbb{Z}_p[x]_n, +, \odot_f)$ ein Körper der Ordnung p^n.*

Beweis. Mit 1.40 gilt: $(\mathbb{Z}_p[x]_n, +, \odot_f)$ ist ein Körper. Es gilt:

$$
\mathbb{Z}_p[x]_n \quad = \quad \{a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n_2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0 : a_i \in \mathbb{Z}_p\}
$$

Wobei sich für jedes a_i genau p Möglichkeiten ergeben, da $a_i \in \mathbb{Z}_p$ und $|\mathbb{Z}_p| = p$. Somit gilt $\mathbb{Z}_p[x]_n = p^n$. $\square$

Bemerkung 1.42. *a) Für jede natürliche Zahl n und jede Primzahl p existiert irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}_p[x]$. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Primzahl p einen endlichen Körper der Ordnung p^n.*

b) Jeder endliche Körper hat Ordnung p^n für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$.

c) Zwei endliche Körper gleicher Ordnung sind isomorph.

Beispiel 1.43. *Wir betrachten den Körper $\mathbb{Z}_2[x]$. Das Polynom $f = x^3 + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[x]$:*
Angenommen f ist nicht irreduzibel, so $f = g \cdot h$ mit $\mathrm{grad}(g) < 3$, $\mathrm{grad}(h) < 3$, $\mathrm{grad}(g) + \mathrm{grad}(h) = 3$, *also hat g oder h den Grad 1. Dieses hat Nullstelle in $\mathbb{Z}_2$, dann auch f. Aber f hat keine Nullstelle, somit erhalten wir einen Widerspruch und die Behauptung folgt.*

Mit 1.40 ist $(\mathbb{Z}_2[x]_3, +, \odot_f)$ *ein Körper der Ordnung* $2^3 = 8$. *Multiplikationstafel:*

$\odot_f$	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x	0	x	x^2	x^2+x	$x+1$	1	x^2+x+1	x^2+1
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x					
x^2	0	x^2				x		
x^2+1	0	x^2+1			x			
x^2+x	0	x^2+x						
x^2+x+1	0	x^2+x+1						

Was ist $x \odot_f x^2$ *?*

$$\begin{aligned} x \cdot x^2 &= x^3 \\ &= 1 \cdot \underbrace{(x^3+x+1)}_{=f} + \underbrace{(x+1)}_{Rest} \end{aligned}$$

Satz 1.44. *Sei* K *ein Körper, sei* $f = \sum_{i=0}^{n} a_k \cdot x^k \in K[x]$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $n \geq 1$. *Dann existieren eindeutig bestimmte normierte paarweise verschiedene Polynome* $p_1, \ldots, p_l \in K[x]$ *und* $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$, *so dass gilt:*

$$f = a_n \cdot \prod_{i=1}^{l} p_i^{m_i}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis über die Primfaktorenzerlegung. □

2 Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

In diesem Kapitel betrachten wir den Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ genauer. Es gibt unendlich viele reelle Zahlen, die man sich als Punkte auf der Zahlengerade veranschaulichen kann.
Am Ende des Kapitels betrachten wir außerdem den Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ genauer.
Es gilt folgende Teilmengenrelation: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Satz 2.1. *(1) Die Menge $\mathbb{R}$ ist durch die übliche $\leq$-Relation linear (total) geordnet:*

Reflexivität: $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \leq a.$
Antisymmetrie: $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \quad \wedge \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b.$
Transitivität: $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \quad \wedge \quad b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c.$
Total: $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \quad \vee \quad b \leq a.$

(2) $\forall x, y, a \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + a \leq y + a.$ *(*Translationsinvarianz*)*

(3) $\forall x, y, a \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \quad \wedge \quad a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot a \leq y \cdot a.$ *(*Dehnungsinvarianz*)*

(4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N}: \quad x \cdot n > y).$ *(*Archimedes[1] Axiom*)*

Daraus ergeben sich sofort viele einfache Folgerungen:
$x < y \quad \Rightarrow \quad x + a < y + a,$
$x < y \quad \wedge \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot a < y \cdot a,$
$a, b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a + b \geq 0 \quad \wedge \quad a \cdot b \geq 0,$
$a, b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0 \quad \wedge \quad a \cdot b > 0,$
$a \geq 0 \quad \wedge \quad b \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \leq 0.$

Satz 2.2. *a)* $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq y - x \quad \Leftrightarrow \quad -y \leq -x.$

b) $\forall x, y, a \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \quad \wedge \quad a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot x \geq a \cdot y.$
(Insbesondere $a \leq 0$, $b \leq 0$, so $a \cdot b \geq 0$)

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{n} < x.$

e) $\forall y \in \mathbb{R}: \quad y^2 \geq 0.$

f) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad x^n < y^n \quad \Leftrightarrow \quad x < y.$

[1] Archimedes von Syrakus war ein antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur (287 v. Chr. - 212 v. Chr.).

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
x \le y \quad &\underset{2.1,\,(2)}{\Rightarrow} \quad 0 = x + (-x) \le y + (-x) = y - x \\
&\Rightarrow \quad 0 \le y - x \\
y - x \ge 0 \quad &\underset{2.1,\,(2)}{\Rightarrow} \quad -x = (-y) + (y - x) \ge (-y) + 0 = -y \\
&\Rightarrow \quad -y \le -x
\end{aligned}$$

Es gilt also: $x \le y \ \Rightarrow\ -y \le -x \quad (*)$.

$$\begin{aligned}
-y \le -x \quad &\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad y = -(-y) \ge -(-x) = x \\
&\Rightarrow \quad x \le y
\end{aligned}$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Falls $x \ge 1 > \frac{1}{2}$, so wähle $n = 2$.
Falls $0 < x < 1$, so gilt nach 2.1 (4): $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > 1$, multiplizieren mit $\frac{1}{n} > 0$.
Nach 2.1 (3): $x > \frac{1}{n}$.

Der gesamte Beweis kann in [WHK04], Satz 5.1, nachgelesen werden. □

Definition 2.3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Wir definieren folgende Mengen:*

$$\begin{aligned}
[a, b] \quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\
]a, b[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\
[a, b[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{Halboffenes Intervall} \\
]a, b] \quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{Halboffenes Intervall}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
]-\infty, b] \quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} \\
]-\infty, b[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
[a, \infty[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a \le x\} \\
]a, \infty[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
]-\infty, \infty[\quad &:= \quad \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.4. *a) Bestimme alle reellen Zahlen x mit $2 \cdot x + 4 \le -3 \cdot x + 5$:*

$$\begin{aligned}
2 \cdot x + 4 \le -3 \cdot x + 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 5 \cdot x \le 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \le \frac{1}{5} \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{1}{5}\right]
\end{aligned}$$

b) Bestimme alle reellen Zahlen x mit $-3 \cdot x + 2 < 1$ und $\frac{1}{x} + 2 \ge 3$.

$$-3 \cdot x + 2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \cdot x < -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{3}$$

Da die 1.Ungleichung nur für $x > 0$ erfüllt werden kann, betrachten wir für die 2.Ungleichung nur diesen Fall:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 2 \geq 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq x \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left]\frac{1}{3}, 1\right] \end{aligned}$$

Satz 2.5. *(*Bernoullische Ungleichung[2]*).*
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}: \quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$

Beweis. Induktion nach n.
IA: $n = 1$. $\quad (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$.
IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} \quad &= \quad (1+x)\cdot(1+x)^n \\ &\underset{\text{I.V.}}{\geq} \quad (1+x)\cdot(1+n\cdot x) \\ (1+x) \quad &\underset{2.1\ (3)}{\geq} \quad 0 \\ (1+x)\cdot(1+n\cdot x) \quad &= \quad 1 + (n+1)\cdot x + \underbrace{n\cdot x^2}_{\geq 0 \text{ mit } 2.2 \text{ e)}} \\ &\geq \quad 1 + (n+1)\cdot x \end{aligned}$$

□

Korollar 2.6. *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $x \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $x \leq q^n$. Dann ist $x \leq 0$.*

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $1 = q + t$. Dabei gilt $t > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} & 1 \\ = \quad & 1^{n+1} \\ = \quad & (q+t)^{n+1} \\ \underset{\text{Binomial-Formel}}{=} \quad & q^{n+1} + (n+1)\cdot q^n \cdot t + \ldots + \binom{n+1}{i} \cdot q^i \cdot t^{n+1-i} + \ldots + t^{n+1} \\ \underset{\text{alle Summanden positiv}}{>} \quad & (n+1)\cdot q^n \cdot t \end{aligned}$$

[2]Jakob Bernoulli war ein Schweizer Mathematiker und Physiker (1655 - 1705).

Also gilt $q^n < \frac{1}{(n+1)\cdot t}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & x \leq q^n < \frac{1}{(n+1)\cdot t} \\ \Rightarrow \quad & t \cdot x < \frac{1}{(n+1)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nach 2.2 d) gilt: $t \cdot x \leq 0$. Daraus folgt $x \leq 0$, da $\frac{1}{t} > 0$. □

Definition 2.7. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren:*

$$\begin{aligned} |a| \quad &:= \quad \max(a, -a) \\ &= \quad \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zahl $|a|$ heißt der Absolutbetrag *von a. Wir sagen auch, $|a|$ ist der Abstand von a zu* 0.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $d(a,b) := |a-b|$, Abstand von a zu b.
Beispiel: $d(-7,3) = |-7-3| = 10$.

Satz 2.8. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $-|a| \leq a \leq |a|$ *und* $|a| = |-a|$ *und* $|a|^2 = a^2$.

b) $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \qquad$ *(*Definitheit*)*

c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad$ *(*Multiplikativität*)*

d) $|a + b| \leq |a| + |b| \qquad$ *(*Dreiecksungleichung*)*

Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit:
Gegenbeispiel: $|3 + (-3)| = 0 \neq 6 = 3 + 3 = |3| + |-3|$.

e) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b| \qquad$ *(*Allgemeine Dreiecksungleichung*)*

f) $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

Beweis. a) b) c) folgen aus der Definition.

d)

$$\begin{aligned} |a+b|^2 \quad &= \quad (a+b)^2 \\ &= \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &\underset{2.8 \text{ a)}}{\leq} \quad a^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= \quad (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Nach 2.2 f) gilt: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

e)

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a-c+c-b| \\ &\underset{2.8\text{ d)}}{\leq} |a-c|+|c-b| \end{aligned}$$

f) 2.Ungleichung:

$$\begin{aligned} |a-b| &\underset{2.8\text{ d)}}{\leq} |a|+|-b| \\ &= |a|+|b| \end{aligned}$$

1.Ungleichung:

$$\begin{aligned} ||a|-|b|| &= \begin{cases} |a|-|b| & \text{, falls } |a| \geq |b| \\ |b|-|a| & \text{, falls } |b| > |a| \end{cases} \\ |a| &= |a-b+b| \\ &\underset{2.8\text{ d)}}{\leq} |a-b|+|b| \\ |a|-|b| &\leq |a-b|+|b|-|b| \\ &= |a-b| \\ |b| &= |b-a+a| \\ &\leq |b-a|+|a| \\ &= |a-b|+|a| \\ |b|-|a| &\leq |a-b|+|a|-|a| \\ &= |a-b| \end{aligned}$$

Somit gilt $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

□

Beispiel:

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \leq 3$:
1.Fall: $x-2 \geq 0$: $(x \geq 2)$: $x-2 \leq 3$, $x \leq 5$.
2.Fall: $x-2 < 0$: $(x < 2)$: $-x+2 \leq 3$, $x \geq -1$.
Daraus folgt $\mathbb{L} = [2,5] \cup [-1,2[= [-1,5]$.

Bemerkung 2.9. *Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Beweis. Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. So $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ für $m,n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \\
&\Rightarrow \quad 2 \cdot n^2 = m^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|m^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|m \\
&\Rightarrow \quad 4|m^2 \\
&\Rightarrow \quad 4|2 \cdot n^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|n^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|n \quad \text{Widerspruch zu } \mathrm{ggT}(m,n) = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

Zwei Mengen M, N haben die gleiche Mächtigkeit, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : M \to N$ gibt. Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ haben die gleiche Mächtigkeit (alle drei sind abzählbare Mengen). Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

$\sqrt{2}$ ist Nullstelle von $x^2 - 2$.

Definition 2.10. *Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt* irrational.
Beispiel: $\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Eine reelle Zahl, die Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist, heißt algebraisch.
Beispiel: Jede rationale Zahl q ist algebraisch: $x - q$. $\sqrt{2}$ ist algebraisch, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen transzedent.
Beispiel: π, e sind transzedent.

Bemerkung:

Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Aber $\sqrt{2}$ ist beliebig genau approximierbar mit folgendem Algorithmus:
Genauigkeit: 2^{-100} oder andere Schranke wählen.

$a \leftarrow 0, \quad b \leftarrow 2$
while $b - a \geq 2^{-100}$ **do**
  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$, c ist Mittelpunkt von $[a, b]$
  if $c^2 < 2$ **then**
    $a \leftarrow c$
  else
    $b \leftarrow c$
  end if
end while
Output(a)

Ersetzt man `while b - a` $\geq 2^{-100}$ durch `while(true)` (nie abbrechen), dann erhält man unendlichen Algorithmus, der $\sqrt{2}$ beliebig genau bestimmt.
Dieses Vorgehen wird *Intervallhalbierungsverfahren* oder *Bisektionsverfahren* genannt. Das allgemeines Prinzip halten wir in der nachfolgendenen Definition fest.

Definition 2.11. *Seien $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_0 < b_0$ und sei $B(.\,,.)$ ein Bool'sches Prädikat. Dann heißt der (unendliche) Algorithmus:*

Input(a_0, b_0, B)
$a \leftarrow a_0, \quad b \leftarrow b_0$
while true ***do***
    $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$,   *$c$ ist Mittelpunkt von $[a, b]$*
    if $B(a, b) = 1$ ***then***
        $a \leftarrow c$
    else
        $b \leftarrow c$
    end if
end while
Output(a)

Dieses Vorgehen wird Bisektionsverfahren *(oder* Intervallhalbierungsverfahren*) genannt.*

Seien die Intervallgrenzen nach dem n-ten Schritt a_n und b_n. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad &< \quad b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_0 \\ b_n - a_n \quad &= \quad \frac{b_0 - a_0}{2^n} \end{aligned}$$

Dieses Iterationsverfahren nähert sich immer genauer einer ganz bestimmten reellen Zahl x. Dass man auf keine „Lücke“ stößt, ist der Inhalt von folgendem Axiom:

Bemerkung 2.12. Vollständigkeitsaxiom*: Durch jedes Bisektionsverfahren wird eindeutig eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt.*

Dabei gilt: $a_n \leq x \leq b_n$ und $0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, $|a_n - x| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, $|b_n - x| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Menge $\mathbb{R}$ ist archimedisch total geordneter Körper, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Bemerkung:

Intuitiv ist klar, dass das (unendliche) Bisektionsverfahren zu Beginn $\sqrt{2}$ liefert mit folgendem Bool'schen Prädikat:

$$B(a, b) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < 2 \\ 0 & \text{falls } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 2 \end{cases}$$

Exakter Beweis (mit 2.12):
Sei x die eindeutig bestimmte reelle Zahl, die durch dieses Bisketionsverfahren bestimmt wird (2.12). Es gilt: $a_n \leq x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion gilt: $a_n^2 < 2 \leq b_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &< x^2 - a_n^2 \\ &\leq b_n^2 - a_n^2 \\ &= \underbrace{(b_n + a_n)}_{\leq 2 \cdot b_0} \cdot (b_n - a_n) \\ &\leq 4 \cdot (b_n - a_n) \\ &= 8 \cdot 2^{-n} \end{aligned}$$

Es gilt also $\frac{x^2-2}{8} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 2.6 gilt: $\frac{x^2-2}{8} \leq 0$ und damit $x^2 - 2 \leq 0$.
Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &\leq b_n^2 - a_n^2 \\ &\leq 8 \cdot 2^{-n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Mit 2.6 gilt: $2 - x^2 \leq 0$. Also gilt: $x^2 - 2 = 0$ und damit $x = \sqrt{2}$.

Unendliche Binärdarstellung reeller Zahlen

Entscheidende Frage: Wie geht das für $x \in [0, 1]$?

$$\begin{array}{ccccccccc} & & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & \dots \\ 0 & , & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ & & 0 \cdot \frac{1}{2^1} + & 1 \cdot \frac{1}{2^2} + & 0 \cdot \frac{1}{2^3} + & 1 \cdot \frac{1}{2^3} + & 1 \cdot \frac{1}{2^3} + & 0 \cdot \frac{1}{2^6} + & 1 \cdot \frac{1}{2^7} + & \dots \end{array}$$

Satz 2.13. *a) Sei $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ eine Abbildung. Wende das Bisektionsverfahren auf $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$ in folgender Weise an:*
Ist $f(n) = 1$, so setze $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ und $b_n = b_{n-1}$
Ist $f(n) = 0$, so setze $a_n = a_{n-1}$ und $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

Schreibweise mit Bool'schen Prädikat:

$$B(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(n) = 1 \\ 0 & \text{falls } f(n) = 0 \end{cases}$$

Dann wird hierdurch genau eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$ bestimmt.

Es ist gilt: $|x - \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k}| \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot 2^{-k} = 0, f(1)f(2) \dots$. Die Folge $(f(1), f(2), \dots)$ heißt Binärentwicklung *von x.*

b) Umgekehrt gibt es zu jedem $x \in [0, 1]$ eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, die gemäß 2.13 a) die Zahl x bestimmt.

Man beachte, dass die Funktion f nicht eindeutig ist. Beispielsweise beschreibt die Folge $(0, 1, 1, 1, \dots)$ und die Folge $(1, 0, 0, 0, \dots)$, jeweils die Gleiche Zahl $\frac{1}{2}$.

Beweis. a) Nach 2.12 existiert x. Wir zeigen: $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x - a_n| &= x - a_n \\ &\leq b_n - a_n \\ &= \frac{b_0 - a_0}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= 2^{-n} \end{aligned}$$

Induktion nach n.
IA: $n = 1$. $a_1 = f(1) \cdot \frac{1}{2}$.
IS: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k}$
Fall 1: $f(n+1) = 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= \frac{a_n + a_n + \frac{1}{2^n}}{2} \qquad \text{da } b_n = a_n + \frac{1}{2^n} \\ &= a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k} + f(n+1) \cdot 2^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Fall 2: $f(n+1) = 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) \cdot 2^{-k} \end{aligned}$$

Vergleiche hierzu [WHK04] Satz 5.7.

□

Beispiel 2.14. *Wie sieht die Binärdarstellung von* $\sqrt{2}$ *aus ?* $1, \ldots$ *.*
Wende Bisektionsverfahren mit $a = 0$*,* $b = 1$ *auf* $\sqrt{2} - 1$ *an. Dann erhalten wir:* $\sqrt{2} \approx 1,011010100\ldots$

Man kann zeigen: Die Binärdarstellung von x *wird genau dann, ab einer gewissen Stelle periodisch, wenn* $x \in \mathbb{Q}$*. Beispiel:* $0,10110101010101\ldots$

Korollar 2.15. *a) Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *und jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existiert* $q \in \mathbb{Q}$ *mit* $|x - q| \leq \frac{1}{2^n}$

b) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.

c) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.

Beweis. a) Sei $x = z + x_0 \in \mathbb{R}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $x_0 \in [0, 1[$. Wende 2.13 auf x_0 an, so erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $q = z + \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k} \in \mathbb{Q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |x - q| &= |x_0 - \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot 2^{-k}| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

b) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Es gilt $0 < x_2 - x_1 > \frac{1}{2^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit 2.2 d).
Nach 2.15 a) existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x_1 - q| \leq \frac{1}{2^n}$.
1.Fall: $x_1 \leq q$, dann $x_1 \leq q < x_2$.
2.Fall: $q < x_1$. Dann $x_1 \leq q + \frac{1}{2^n} < x_2$.

c) Übungsaufgabe.

□

Definition 2.16. *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.*

a) Die Menge M heißt nach oben beschränkt*, falls es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq d$ für alle $m \in M$.*

Die Zahl d heißt dann eine obere Schranke *von M. (Gibt es eine obere Schranke, so gibt es unendlich viele, z.b. $d, d+1, d+2, \ldots$).*

Die Zahl d heißt obere Grenze *oder* Supremum *von M,* $\sup(M)$*, falls d obere Schranke von M ist und falls gilt: Ist d' eine weitere obere Schranke von M, so gilt $d \leq d'$. (d ist also die kleinste obere Schranke).*

b) Die Menge M heißt nach unten beschränkt*, falls es ein $e \in \mathbb{R}$ gibt mit $e \leq m$ für alle $m \in M$.*

Die Zahl e heißt dann eine untere Schranke *von M. (Gibt es eine untere Schranke, so gibt es unendlich viele, z.b. $e, e-1, e-2, \ldots$).*

Die Zahl e heißt untere Grenze *oder* Infimum *von M,* $\inf(M)$*, wenn e untere Schranke von M ist und falls gilt: Ist e' eine weitere untere Schranke von M, so ist $e' \leq e$. (e ist also die größte untere Schranke).*

c) Die Menge M heißt beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Ist $\sup(M) \in M$*, so nennt man dies* Maximum *von M,* $\max(M)$.
Ist $\inf(M) \in M$*, so nennt man dies* Minimum *von M,* $\min(M)$.

Beispiel:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich, dann besitzt M ein kleinstes Element, $\min(M)$, und ein größtes Element, $\max(M)$.
Sei $M = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, so besitzt M kein größtes und kein kleinstes Element.

Beispiel 2.17. *a) Sei $M =]0,1[$. Die Menge M ist beschränkt. Eine untere Schranke ist -14, eine obere Schranke ist 111.*

Es gilt $\inf(M) = 0 \notin M$, $\sup(M) = 1 \notin M$:
Es gilt $0 \leq m$ für alle $m \in]0,1[= M$. Die Zahl 0 ist also eine untere Schranke. Sei $e \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M. Insbesondere gilt dann $e \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 2.6 gilt: $e \leq 0$. Also ist 0 die größte untere Schranke, $0 = \inf(M)$.
Analog kann man zeigen: $1 = \sup(M)$.

b) Sei $M = [0,1]$, so gilt:
$0 = \inf(M) \in M$, $\inf(M) = \min(M)$ und $1 = \sup(M) \in M$, $\sup(M) = \max(M)$.

c) Sei $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Die Menge M ist beschränkt und es gilt $\sup(M) = \max(M) = 1$, $\inf(M) = 0 \notin M$.

Bemerkung 2.18. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine durch $c \in \mathbb{R}$ nach oben beschränkte Menge. Dann gilt:*

$$c = \sup(M) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textit{(1)}\ \forall m \in M : m \leq c \\ \textit{(2)}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : c - \varepsilon < y \end{array}$$

Man beachte dabei, dass die Zahl y von ε abhängig ist.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Angenommen $c = sup(M)$. Die Bedingung (1) folgt direkt aus der Definition des Supremums. Angenommen (2) gilt nicht. Dann gilt $\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in M : y \leq c - \varepsilon$. D.h. $c - \varepsilon$ ist obere Schranke von M mit $c - \varepsilon < c$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass $c = \sup(M)$.

„$\Leftarrow$“: Angenommen es gelten (1) und (2). Mit (1) folgt, dass c eine obere Schranke ist. Angenommen es existiert obere Schranke c' von M mit $c' < c$. Wähle $\varepsilon = c - c' > 0$. Bedingung (2) gilt auch für dieses ε. D.h. es existiert ein $y \in M$ mit $c' = c - \varepsilon < y$. Also ist c' keine obere Schranke von M. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass c' eine obere Schranke von M ist. Daher ist c die kleinste obere Schranke. □

Satz 2.19. *Für jede nach oben/unten beschränkte Menge reeller Zahlen existiert ein Supremum/Infimum.*

Beweis. Sei M eine nach unten beschränkte Menge. Sei $e \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M und $y \in M$ mit $e < y$. Wir wenden das Bisketionsverfahren zur Bestimmung des Infimums wie folgt an:

```
1: a ← e,   b ← y
```

while true **do**
  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  if $M \cap \,]-\infty, c[\, = \emptyset$ **then**
    $a \leftarrow c$
  else
    $b \leftarrow c$
  end if
end while

Man beachte, dass gilt $M \cap \,]-\infty, c[\, = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad M \subseteq [c, \infty[$.
Sei x die durch dieses Bisketionsverfahren eindeutig bestimmte reelle Zahl.
Seien a_n und b_n die Intervallgrenzen im n-ten Schritt. Dann gilt: $a_n \leq x \leq b_n$ und $0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion $(*)$ gilt $M \cap \,]-\infty, a_n[\, = \emptyset$ und $M \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Noch zu zeigen: $x = \inf(M)$.

(1) Die Zahl x ist untere Schranke von M. Angenommen nicht, dann existiert $z \in M$ mit $z < x$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < x - z$. Dann $z < x - (b_n - a_n) \leq b_n - (b_n - a_n) = a_n$. Dies ist ein Widerspruch zu $(*)$.

(2) Die Zahl x ist Infimum von M. Angenommen es gibt eine untere Schranke e mit $x < e$. Wähle n mit $b_n - a_n < e - x$. Dann gilt $e - x > b_n - a_n \geq b_n - x$, d.h. $e > b_n$. Aber $M \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $z \in M$ mit $z \leq b_n < e$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass e eine untere Schranke von M ist.

Der Beweis für das Supremum erfolgt analog. □

Beispiel 2.20. *Sei $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \geq 2\} \subseteq \mathbb{R}$. Das Bisektionsverfahren aus dem Beweis von 2.19 ist genau das, dass wir zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ verwendet haben. Wir erhalten damit $\sqrt{2} = \inf(M)$.*
Sei $\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}$, so erhalten wir $\sqrt{2} = \sup(\tilde{M})$.

Allgemein gilt: Ist $0 < a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so existiert $\sqrt[n]{a} = \sup(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^n \leq a\})$. Der Beweis verläuft ähnlich wie bei $\sqrt{2}$, siehe dazu [WHK04] Satz 5.11.

Als nächstes wollen wir den Körper der komplexen Zahlen näher betrachten. Dieser kann beschrieben werden durch $(\mathbb{R}[x]_2, +, \odot_f)$ mit $f = x^2 + 1$. Dabei gilt:

$$(a \cdot x + b) \odot_f (c \cdot x + d) \quad = \quad (a \cdot d + b \cdot c) \cdot x + (b \cdot d - a \cdot c)$$

Mit 1.40 handelt es sich dabei tatsächlich um einen Körper. Üblicherweise schreibt man i statt x und $\cdot$ statt $\odot_f$.

Satz 2.21. *a) $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein Körper bzgl. folgenden Verknüpfungen. Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, so gilt:*

$$(a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) \quad = \quad (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) \quad = \quad (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

Schreibweise: $0 + 1 \cdot i = i$ *und* $i^2 = -1$, *wobei* $-1 = -1 + 0 \cdot i$. *Weiter schreiben wir* a *für* $a + 0 \cdot i$ *und* $b \cdot i$ *für* $0 + b \cdot i$.
Multiplikationsregel: Distributiv ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ *beachten.*

b) $\mathbb{R} = \{a + 0 \cdot i : a \in \mathbb{R}\}$ *ist Teilkörper von* $\mathbb{C}$.

c) Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. *So gilt:*

$$a_1 + b_1 \cdot i = a_2 + b_2 \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2$$

d) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. *Ist* $a + b \cdot i \neq 0$, *d.h.* $a \neq 0$ *oder* $b \neq 0$, *so gilt:*

$$(a + b \cdot i)^{-1} \quad = \quad \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Speziell:
Für $a \neq 0$ *und* $b = 0$ *gilt* $(a + 0 \cdot i)^{-1} = \frac{1}{a} = a^{-1}$, *das Inverse in* $\mathbb{R}$.
Für $a = 0$ *und* $b \neq 0$ *gilt* $(b \cdot i)^{-1} = -\frac{1}{b} \cdot i$.

Beweis. a) b) c) folgen aus 1.35 und 1.40.

d) Durch Nachrechnen erhält man:

$$\begin{aligned} & (a + b \cdot i) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) \\ = & \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} - \frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} \right) \cdot i \\ = & \ 1 + 0 \cdot i \\ = & \ 1 \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$\begin{aligned} (3 - 2 \cdot i) \cdot (5 + 4 \cdot i) &= 23 + 2 \cdot i \\ (3 - 2 \cdot i)^{-1} &= \frac{1}{3 - 2 \cdot i} \\ &= \frac{3}{13} + \frac{2}{13} \cdot i \end{aligned}$$

Definition 2.22. *Sei* $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, *dann heißt* $a =: \mathcal{R}(z)$ Realteil *von* z *und* $b =: \mathcal{I}(z)$ Imaginärteil *von* t. *Dabei gilt:* $\mathcal{R}(z), \mathcal{I}(z) \in \mathbb{R}$.

Die Zahl $\overline{z} := a - b \cdot i$ *heißt zu* z konjugiert komplexe Zahl.

Bemerkung 2.23. *Die komplexen Zahlen lassen sich geometrisch veranschaulichen. Dazu bilden wir eine komplexe Zahl* $z = a+b\cdot i \in \mathbb{C}$ *wie folgt ab:* $z = a+b\cdot i \leftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Addition: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
Multiplikation: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_2)$
$z \to \overline{z}$ *entspricht Spiegelung an der x-Achse. Speziell:* $1 \leftrightarrow (1, 0)$ *und* $i \leftrightarrow (0, 1)$.

Satz 2.24. *Seien* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{(z_1 + z_2)}$

b) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(z_1 \cdot z_2)}$

c) $z \cdot \overline{z} = \mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2$

Mit a) und b) folgt, dass Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ *Körperisomorphismus von* $\mathbb{C}$ *nach* $\mathbb{C}$ *bildet.*

Man Beachte: Ist $z \neq 0$*, so gilt mit c) :*

$$\begin{aligned} z \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2}\right) \cdot \overline{z} &= 1 \\ z^{-1} &= \left(\frac{1}{\mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2}\right) \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

Beweis. Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a)

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 \cdot i) + (a_2 - b_2 \cdot i) \\ &= a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) \cdot i \\ &= \overline{(z_1 + z_2)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i) \\ &= a_1 \cdot a_2 - (-b_1) \cdot (-b_2) + (-a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot i \\ &= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i \\ &= \overline{(z_1 \cdot z_2)} \end{aligned}$$

c)

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = (a^2 + b^2) + 0 \cdot i$$

□

Definition 2.25. *Den* Absolutbetrag *von $z \in \mathbb{C}$ definieren wir durch:*

$$\begin{aligned} |z| &:= +\sqrt{z \cdot \overline{z}} \\ &\underset{2.24}{=} +\sqrt{\mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2} \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Insbesondere: Ist $z \in \mathbb{R}$, so ist $|z|$ üblicher Absolutbetrag in $\mathbb{R}$.

Den Abstand von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ definieren wir durch $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.

Bemerkung:

$$\begin{aligned} |z| &= +\sqrt{\mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2} \geq +\sqrt{\mathcal{R}(z)^2} = |\mathcal{R}(z)| \\ |z| &= +\sqrt{\mathcal{R}(z)^2 + \mathcal{I}(z)^2} \geq +\sqrt{\mathcal{I}(z)^2} = |\mathcal{I}(z)| \end{aligned}$$

Satz 2.26. *Seien $z, z_1, z_2, u \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

a) $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$ *(Definitheit)*

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *(Multiplikativität)*

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

d) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - u| + |u - z_2|$

e) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.27. *Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Daher ist $f = a_n \cdot (x - b_1) \cdot \ldots \cdot (x - b_n)$, wobei a_n der höchste Koeffizient ungleich 0 von f ist und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden).*
Insbesondere gilt: Irreduzible Polynome in $\mathbb{C}[x]$ haben den Grad 1.

3 Folgen und Reihen

Wir wollen nun (unendliche) Folgen und (unendliche) Reihen einführen und auf diesen einen Konvergenzbegriff definieren. Das Bisektionsverfahren aus dem vorherigen Kapitel liefert beispielsweise die Folgen $a_0, a_1, \dots$ bzw. $b_0, b_1, \dots$, die gegen eine Zahl x konvergieren.

Definition 3.1. *Sei $k \in \mathbb{Z}$, $A_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$. Die Abbildung*

$$a : \begin{cases} A_k \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

heißt bei k beginnende Folge *reeller Zahlen.*

Schreibweise: $(u_n)_{n \geq k}$ oder (u_n), falls sich der Startindex aus dem Kontext ergibt. Häufig wird als Startindex $k = 0$ oder $k = 1$ gewählt.
Die Zahl u_n heißt Glied der Folge *und die Zahl n* Index.

Beispiel 3.2. *Sei $k = 1$.*

a) Sei $u_n = 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$(\underbrace{5}_{=u_1}, \underbrace{5}_{=u_2}, \underbrace{5}_{=u_3}, \dots)$$

b) Sei $u_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots)$$

c) Sei $u_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right)$$

d) Sei $u_n = \frac{(n+1)^2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(2,\ \frac{9}{4},\ 2,\ \frac{25}{16},\ \dots\right)$$

e) Sei $u_n = \frac{3 \cdot n^2 + 1}{n^2 + n + 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f) *Sei* $u_n = (-1)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

$$(-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots)$$

g) *Sei* $u_n = \frac{1}{2} \cdot u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$ *für* $n \geq 2$ *und* $u_1 = 1$. *Hierbei handelt es sich um eine rekursiv definierte Folge.*

$$\left(1,\ \frac{3}{2},\ \dots\right)$$

h) *Sei* $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(1,\ \frac{3}{2},\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ \dots\right)$$

i) *Sei* $u_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(-1,\ -1 + \frac{1}{2},\ -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \dots\right)$$

Definition 3.3. *Eine Folge* $(u_n)_{n \geq k}$ *heißt* beschränkt, *falls es eine Zahl* $d \in \mathbb{R}$ *mit* $d > 0$ *und* $|u_n| \leq d$ *gibt. D.h. es gilt* $-d \leq u_n \leq d$ *für alle* $n \geq k$ *bzw. die Menge* $\{u_n : n \geq k\}$ *ist beschränkt.*

Definition 3.4. *Eine Folge* $(u_n)_{n \geq k}$ konvergiert *gegen* $c \in \mathbb{R}$, *falls gilt*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| < \varepsilon$$

Die Zahl c *heißt* Grenzwert *oder* Limes, *bezeichnet mit* $c = \lim_{n\to\infty} u_n$ *oder* $(u_n) \to c$. *Konvergiert eine Folge* $(u_n)_{n \geq k}$ *nicht gegen* $c \in \mathbb{R}$, *so schreibt man auch* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq c$. *Dann gilt:* $\exists \varepsilon > 0\ \forall n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| \geq \varepsilon$.

Beispiel 3.5. *a)* *Die Folge* $u_n = n$ *ist nicht beschränkt und nicht konvergent.*

Die Folge ist nicht beschränkt, da sie nicht nach oben beschränkt ist:
Angenommen u_n *sei nach oben beschränkt, so gibt es ein* $d \in \mathbb{R}$ *mit* $u_n = n \leq d$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Betrachte Folgenglied mit Index* $2 \cdot d : u_{2 \cdot d} = 2 \cdot d \not\leq d$. *Dies ist ein Widerspruch, dass* d *obere Schranke ist. Folge ist also nicht nach oben beschränkt.*

Die Folge ist nicht konvergent: Angenommen $\lim_{n\to\infty} u_n = c \in \mathbb{R}$. *Dann muss nach Definition gelten:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - c| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq n(\varepsilon)$. *Wähle* $\varepsilon = 1$, *so* $\exists n(1) : |u_n - c| < 1$ *für alle* $n \geq n(1)$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} |n| &= |n - c + c| \\ &\leq |n - c| + |c| \\ |n| - |c| &= n - |c| \\ &\leq |n - c| \end{aligned}$$

$$< \quad 1$$

Es gilt also $n < 1 + |c|$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n(1)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass die Folge nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Folge nicht konvergent.

b) *Sei $u_n = \frac{1}{n}$ eine Folge. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:*
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$ (so ein $n(\varepsilon)$ existiert mit 2.2 d)).
Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n(\varepsilon)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

c) *Sei $u_n = \frac{3 \cdot n^2 + 1}{n^2 + n + 2}$ eine Folge. Diese Folge konvergiert gegen 3:*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 6 - 3 \cdot n - 6 + 1}{n^2 + n + 2} \\ &= 3 + \frac{-3 \cdot n - 5}{n^2 + n + 2} \\ |u_n - 3| &= \left|\frac{-3 \cdot n - 5}{n^2 + n + 2}\right| \\ &= \frac{3 \cdot n + 5}{n^2 + n + 2} \end{aligned}$$

Sei $n \geq 5$, so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot n + 5}{n^2 + n + 2} &\leq \frac{3 \cdot n + n}{n^2} \\ &= \frac{4 \cdot n}{n^2} \\ &= \frac{4}{n} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Mit 2.2 d) existiert $n(\varepsilon) \geq 5$ mit $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{4}$. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} |u_n - 3| &= \frac{3 \cdot n + 5}{n^2 + n + 2} \\ &\underset{n \geq n(\varepsilon) \geq 5}{\leq} \frac{4}{n} \\ &\leq \frac{4}{n(\varepsilon)} \\ &< \frac{4 \cdot \varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

d) *Sei* $u_n = (-1)^n$ *eine Folge:* $(-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots)$. *Die Folge* u_n *konvergiert nicht, d.h.* $\exists \varepsilon > 0\ \forall n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n(\varepsilon) : |u_n - c| \geq \varepsilon$. *Sei* $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *Angenommen* u_n *konvergiert gegen* $c \in \mathbb{R}$. *Dann existiert* $n\left(\frac{1}{2}\right)$, *so dass* $|u_n - c| < \frac{1}{2}$ *für alle* $n \geq n\left(\frac{1}{2}\right)$. *Für alle* $n \geq n\left(\frac{1}{2}\right)$ *gilt:*

$$\begin{aligned} 2 &= |u_n - u_{n+1}| \\ &\leq |u_n - c| + |c - u_{n+1}| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Satz 3.6. *a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

b) Sind $u = (u_n)_{n\geq k}$ *und* $v = (v_n)_{n\geq k}$ *beschränkte Folgen, so sind auch die Summe* $u + v := (u_n + v_n)_{n\geq k}$, *das Produkt* $u \cdot v := (u_n \cdot v_n)_{n\geq k}$ *und der Absolutbetrag* $|u| := (|u_n|)_{n\geq k}$ *beschränkte Folgen.*

Beweis. a) Sei $c = \lim_{n\to\infty} u_n$. Wähle $\varepsilon = 1$, dann existiert $m = n(1)$ mit $|u_n - c| < 1$ für alle $n \geq m$. Für alle $n \geq m$ gilt:

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - c + c| \\ &\leq |u_n - c| + |c| \\ &< 1 + |c| \end{aligned}$$

Sei $M = \max\{|u_k|, \ldots, |u_{m-1}|\}$. Setze $d = \max(M, 1 + |c|)$. Dann gilt: $|u_n| \leq d$ für alle $n \geq k$.

b) Wir zeigen die Behauptung exemplarisch anhand der Summe: Angenommen es gilt $|u_n| \leq d$ und $|v_n| \leq f$ für alle $n \geq k$. So gilt:

$$\begin{aligned} |u_n + v_n| &\leq |u_n| + |v_n| \\ &\leq d + f \qquad \forall n \geq k \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(u_n+v_n)_{n\geq k}$ beschränkt. Für das Produkt und den Absolutbetrag können ähnliche Beweise geführt werden.

□

Man beachte, dass die Umkehrung von Satz 3.6 a) im Allgemeinen nicht gilt. Beispielsweise ist die Folge $u_n = (-1)^n$ beschränkt, aber konvergiert nicht (siehe 3.5).

Definition 3.7. *Sei* $u = (u_n)_{n\geq k}$ *eine Folge.*

a) *Die Folge* u *heißt* monoton wachsend, *falls* $u_n \leq u_{n+1}$ *für alle* $n \geq k$.

b) *Die Folge* u *heißt* streng monoton wachsend, *falls* $u_n < u_{n+1}$ *für alle* $n \geq k$.

c) *Die Folge u heißt* monoton fallend, *falls* $u_n \geq u_{n+1}$ *für alle* $n \geq k$.

d) *Die Folge u heißt* streng monoton fallend, *falls* $u_n > u_{n+1}$ *für alle* $n \geq k$.

e) *Die Folge u heißt* monoton, *falls u monoton wachsend oder monoton fallend ist.*

Beispiel 3.8. a) *Die Folge* $u_n = \frac{1}{n}$ *ist streng monoton fallend.*

b) *Die Folge* $u_n = \sqrt{n}$ *ist streng monoton wachsend.*

c) *Die Folge* $u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ *ist nicht monoton.*

d) *Sei* $u_1 = 5$ *und* $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ *für alle* $n \geq 1$. *Die Folge* u_n *ist monoton fallend.*

Zunächst zeigen wir: $u_n > 2$ *für alle* n. *Beweis per Induktion nach* n.
IA: $n = 1$. $u_1 = 5 > 1$.
IS: $n \to n+1$. *Induktionsvoraussetzung:* $u_n = 2 + d$, $d > 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2+d}{2} + \frac{2}{2+d} \\ &= 1 + \frac{d}{2} + 1 - \frac{d}{2+d} \\ &= 2 + \frac{d \cdot (d+2) - 2 \cdot d}{2 \cdot (2+d)} \\ &= 2 + \underbrace{\frac{d^2}{4 + 2 \cdot d}}_{>0} \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} u_n > u_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad d > \frac{d^2}{4+2\cdot d} \\ &\underset{d>0}{\Leftrightarrow} \quad 1 > \frac{d}{4+2\cdot d} \\ &\underset{4+2\cdot d>0}{\Leftrightarrow} \quad 4 + 2 \cdot d > d \\ &\Leftrightarrow \quad 4 + d > 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Aussage gilt, gilt somit $u_n > u_{n+1}$ *für alle* $n \geq 1$. *Somit ist die Folge streng monoton fallend.*

Satz 3.9. a) *Ist* $(u_n)_{n\geq k}$ *eine monoton wachsende und (nach oben) beschränkte Folge, so ist* $(u_n)_{n\geq k}$ *konvergent und* $\lim_{n\to\infty} u_n = \sup\{u_n : n \geq k\}$.

b) *Ist* $(u_n)_{n\geq k}$ *eine monoton fallende und (nach unten) beschränkte Folge, so ist* $(u_n)_{n\geq k}$ *konvergent und* $\lim_{n\to\infty} u_n = \inf\{u_n : n \geq k\}$.

Beweis. a) Sei $|u_n| \leq d$ für alle $n \geq k$. Nach 2.19 existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $c = \sup\{u_n : n \geq k\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $u_{n(\varepsilon)}$ mit $c - \varepsilon < u_{n(\varepsilon)} \leq c$ nach 2.18. Für alle $n \geq n(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} |u_n - c| &= c - u_n \\ &\underset{u_n \text{ monoton wachsend}}{\leq} c - u_{n(\varepsilon)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

b) Analog.

□

Beispiel 3.10. *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und sei $u_n = (q^n)_{n \geq 1}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*
Die Folge (u_n) ist monoton fallend: $q < 1,\ q^2 < q,\ q^3 < q^2,\ \ldots$.
Die Folge (u_n) ist nach unten beschränkt: $u_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$.
Mit 3.9 konvergiert (u_n). Mit 2.6 gilt: $\inf\{q^n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Mit 3.9 gilt: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Definition 3.11. *Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt* Nullfolge*.*

Satz 3.12. *Rechenregeln für konvergente Folgen:*

a) Für eine Folge (u_n) gilt:

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geq k} \text{ konvergiert gegen } c \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad (u_n - c)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \\ &\Leftrightarrow \quad (|u_n - c|)_{n\geq k} \text{ ist Nullfolge} \end{aligned}$$

Im Folgenden seien (u_n), (v_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} u_n = c$ und $\lim_{n\to\infty} v_n = d$.

b) $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |c|$.

c) $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = c + d$.

d) $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = c \cdot d$.

Insbesondere gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:
$\lim_{n\to}(a \cdot u_n) = a \cdot c$.

e) Ist $v_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d \neq 0$, so $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{c}{d}$.

f) Existiert m mit $u_n \leq v_n$ für alle $n \geq m$, so ist $c \leq d$.

g) Existiert m mit $0 \leq x_n \leq v_n$ für alle $n \geq m$ und ist (v_n) Nullfolge, so ist (x_n) Nullfolge.

Beweis. a) Aus der Gleichheit von $|(u_n - c) - 0| = |u_n - c| = ||u_n - c| - 0|$ folgt die Behauptung.

b) Mit 2.8 gilt $||u_n| - |c|| \leq |u_n - c|$, woraus die Behauptung folgt.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (c+d)| &= |(u_n - c) + (v_n - d)| \\ &\leq |u_n - c| + |v_n - d| \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$.
Da $\lim_{n\to\infty} u_n = c$ existiert n_1 mit $|u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$.
Da $\lim_{n\to\infty} v_n = d$ existiert n_2 mit $|v_n - d| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$.
Setze $n(\varepsilon) = \max(n_1, n_2)$, dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (c+d)| &\leq |u_n - c| + |v_n - d| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

d) Es gilt:

$$\begin{aligned} |u_n \cdot v_n - c \cdot d| &= |u_n \cdot v_n - c \cdot v_n + c \cdot v_n - c \cdot d| \\ &\leq |u_n \cdot v_n - c \cdot v_n| + |c \cdot v_n - c \cdot d| \\ &= |v_n| \cdot |u_n - c| + |c| \cdot |v_n - d| \end{aligned}$$

Da (v_n) konvergiert, ist (v_n) nach 3.6 a) beschränkt. Es existiert somit ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $|v_n| \leq b$ für alle n. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |u_n \cdot v_n - c \cdot d| &\leq |v_n| \cdot |u_n - c| + |c| \cdot |v_n - d| \\ &\leq b \cdot |u_n - c| + |c| \cdot |v_n - d| \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$.
Es existiert n_1 mit $|u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot b}$ für alle $n \geq n_1$.
Es existiert n_2 mit $|v_n - d| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |c|}$ für alle $n \geq n_2$.
Setze $n(\varepsilon) := \max(n_1, n_2)$. Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |u_n \cdot v_n - c \cdot d| &\leq b \cdot |u_n - c| + |c| \cdot |v_n - d| \\ &< b \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot b} + |c| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

f) Es gilt:

$$\begin{aligned} d - c &\underset{3.12\text{ c) d)}}{=} \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} |v_n - u_n| \\ &\underset{3.12\text{ b)}}{=} |d - c| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Somit gilt $d \geq c$.

g) Es gilt:

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= x_n \\ &\leq v_n \\ &= |v_n - 0| \end{aligned}$$

Somit ist (x_n) Nullfolge.

□

Bemerkung 3.13. *Betrachte Bisketionsverfahren, welches Zahl $x \in \mathbb{R}$ bestimmt (vgl. 2.12). Dabei gelten folgende Ungleichungen: $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ und $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$. Weiter gilt $a_n \leq x \leq b_n$ und $0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Es folgt:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x - a_n| \\ &\leq b_n - a_n \\ &= \underbrace{\frac{b_0 - a_0}{2^n}}_{\text{Nullfolge}} \end{aligned}$$

Mit 3.12 g) ist $(|x - a_n|)$ eine Nullfolge. Mit 3.12 a) gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Analog kann man zeigen: $\lim_{n\to\infty} b_n = x$.

Beispiel 3.14. *a) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Die Folge $(n \cdot q^n)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge: Klar, falls $q = 0$. Sei $q > 0$. Dann gilt $1 < \frac{1}{q} = 1 + t$, wobei $t > 0$. Weiter gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} &= (1+t)^n \\ &= 1 + n \cdot t + \binom{n}{2} \cdot t^2 + \ldots \\ &\geq \binom{n}{2} \cdot t^2 \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot t^2 \\ q^n &\leq \frac{2}{n \cdot (n-1) \cdot t^2} \\ 0 &\leq n \cdot q^n \\ &\leq \frac{2 \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot t^2} \\ &= \frac{2}{(n-1) \cdot t^2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n-1} \cdot \underbrace{\frac{2}{t^2}}_{\text{Konstante}}}_{\text{Nullfolge}} \end{aligned}$$

Mit 3.12 g) gilt: $(n \cdot q^n)$ *ist Nullfolge.*

b) *Seien* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ *Polynome mit*
$P = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_0$, $a_k \neq 0$ $(\mathrm{grad}(P) = k \geq 0)$ *und*
$Q = b_l \cdot x^l + b_{l-1} \cdot x^{l-1} + \ldots + b_0$, $b_l \neq 0$ $(\mathrm{grad}(Q) = l \geq 0)$.
Sei weiter $Q(n) \neq 0$ *für alle* $n \geq m$ *für ein geeignetes* m.

Ist $k > l$, *so ist* $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n \geq m}$ *nicht konvergent.*
Ist $k = l$, *so* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = \frac{a_k}{b_l}$.
Ist $k < l$, *so ist* $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n \geq m}$ *Nullfolge.*

Die beiden Fälle $k > l$ *und* $k < l$ *sind Übungsaufgabe. Sei* $k = l$, *so gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{P(n)}{Q(n)} &= \frac{a_k \cdot n^k + \ldots + a_0}{b_k \cdot n^k + \ldots + b_0} \\
&= \frac{a_k}{b_k} \cdot \frac{n^k + \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdot n^{k-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_k}}{n^k + \frac{b_{k-1}}{b_k} \cdot n^{k-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_k}} \\
&= \frac{a_k}{b_k} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\left(\frac{a_{k-1}}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{b_k}\right) \cdot n^{k-1} + \ldots + \left(\frac{a_0}{a_k} - \frac{b_0}{b_k}\right)}{n^k + \frac{b_{k-1}}{b_k} \cdot n^{k-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_k}}}_{\text{Nullfolge, da } k-1<k} \right)
\end{aligned}$$

Mit 3.12 c) d) folgt : $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = \frac{a_k}{b_k}$.

Definition 3.15. a) *Eine Folge* $(u_n)_{n \geq k}$ *heißt* strikt positiv, *falls* $u_n > 0$ *für alle* $n \geq k$.

Sei im Folgenden $u = (u_n)_{n \geq k}$ *eine strikt positive Folge.*

b)

$$\begin{aligned}
O(u) &= O(u_n) \\
&:= \left\{ v = (v_n)_{n \geq k} : \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq k} \text{ ist beschränkt} \right\} \\
&= \{ v = (v_n)_{n \geq k} : \exists c > 0 \text{ mit } |v_n| \leq c \cdot u_n \ \forall n \geq k \}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
o(u) &= o(u_n) \\
&:= \left\{ v = (v_n)_{n \geq k} : \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq k} \text{ ist Nullfolge} \right\}
\end{aligned}$$

Es gilt $v \in o(u)$, falls u_n „schneller wächst“ als v_n.
Die Symbole O und o heißen Landau-Symbole*.*

Man beachte: Mit 3.6 a) folgt: $o(u) \subseteq O(u)$.

Beispiel:

Es gilt $(n^2) \in o(n^3)$ und $(n^2+n+1) \in O(n^2)$, da $n^2+n+1 \leq 3 \cdot n^2$.
Es gilt $n^2 \in O(n^2)$, $n^2 \in O(n^3)$, aber $n^3 \notin O(n^2)$, $n^3 \in O(n^3)$.
Die Menge $O(1)$ ist die Menge der beschränkten Folgen.

Laxe Schreibweise:

Statt $(v_n) \in O(u_n)$ schreibt man auch $v_n = O(u_n)$.

Satz 3.16. *Sei $P \in \mathbb{R}[x]$ mit* $\operatorname{grad}(P) = k \geq 0$*. Dann gilt*

a) $(P(n)) \in o\left(n^l\right)$, falls $l > k$.
$(P(n)) \in O\left(n^l\right)$, falls $l \geq k$.

b) Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 1$, so $(P(n)) \in o\left(r^n\right)$.

Beweis. a) Folgt aus 3.14 b).

b) Sei $P(n) = a_k \cdot n^k + \ldots + a_0$. Es gilt

$$\frac{P(n)}{r^n} = a_k \cdot \frac{n^k}{r^n} + a_{k-1} \cdot \frac{n^{k-1}}{r^n} + \ldots + a_0 \cdot \frac{n^0}{r^n}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\left(\frac{n^i}{r^n}\right)$ Nullfolge ist, wobei i fest, aber beliebig. Es gilt $\frac{1}{r} < 1$ und damit:

$$\begin{aligned} 0 &< q \\ &= \sqrt[i]{\frac{1}{r}} \\ &< 1 \\ \frac{n^i}{r^n} &= n^i \cdot \left(q^i\right)^n \\ &= (n \cdot q^n)^i \end{aligned}$$

Mit 3.14 a) gilt $(n \cdot q^n)$ ist Nullfolge. Mit 3.12 d) gilt $(n \cdot q^n)^i$ ist Nullfolge.

□

Bemerkung 3.17. *Satz 3.16 wird auf die Komplexität von Algorithmen angewendet: Sei t_n die maximale Anzahl von Rechenschritten eines Algorithmus bei beliebigen erlaubten Input der Länge n (z.B. binär codiert).*
Existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $(t_n) \in O\left(n^l\right)$, so hat der Algorithmus polynomielle (Zeit-)Komplexität*. Dies sind im gewissen Sinne die „schnellen" Algorithmen.*
Existiert $r > 1$ mit $(r^n) \in O(t_n)$, so hat der Algorithmus mindestens exponentielle (Zeit-)Komplexität*; asymptotisch langsamer als jeder Algorithmus mit polynomialer Zeitkomplexität (jedenfalls im schlimmsten Fall).*

Definition 3.18. *Sei $(u_n)_{n\geq k}$ eine Folge und $g : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ eine streng monoton wachsende Folge, d.h. es gilt $g(l) < g(l+1)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(u_{g(l)})_{l\geq 1}$ eine* Teilfolge *von (u_n).*

Schreibweise: $g(l) = n_l$ oder $(u_{n_l})_{l\geq 1}$.

Beispiele:

Sei $u_n = ((-1)^n \cdot (1 + \frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ und sei $g(n) = 2 \cdot n$, so gilt:

$$\begin{aligned}
(u_{2\cdot n}) &= \left(1 + \frac{1}{2\cdot n}\right)_{n\geq 1} \\
&= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \ldots\right) \\
(u_{2\cdot n-1}) &= \left(-1 - \frac{1}{2\cdot n - 1}\right)_{n\geq 1} \\
&= \left(-2, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, \ldots\right)
\end{aligned}$$

Betrachte $g(l) = l + 4$, so erhält man die folgende Teilfolge:

$$(u_n)_{n\geq 5} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\right)$$

Man beachte: Teilfolgen konvergieren gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.

Satz 3.19. *Satz von Bolzano[1] und Weierstraß[2]: Jede beschränkte Folge hat mindestens eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei u_n eine durch d beschränkte Folge, d.h. es gilt $-d \leq u_n \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wende Bisektionsverfahren mit $a = -d$ und $b = d$ an:

while true **do**

[1] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano war ein Philosoph, Theologie und Mathematiker (1781 - 1848).
[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß war ein deutscher Mathematiker (1815 - 1897).

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
if $|\{n : u_n < c\}| = \infty$ **then**
  $b \leftarrow c$
else
  $a \leftarrow c$
end if
end while

Sei x die durch dieses Bisektionsverfahren bestimmte reelle Zahl und seien (a_l) und (b_l) die Folgen der Intervallgrenzen. Es gilt $a_l \leq x \leq b_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Die Menge $A_l = \{n : a_l \leq u_n < b_l\}$ ist für jedes l unendlich und es gilt $A_l \supseteq A_{l+1}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Setze $n_1 = \min A_1$ (Induktionsprinzip).
Setze $n_{l+1} = \min(A_{l+1} \setminus \{n_1, \ldots, n_l\})$ für alle $l \geq 1$.
Nach Konstruktion gilt $n_l < n_{l+1}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $a_l \leq u_{n_l} \leq b_l$. Die Folge $(u_{n_l})_{l\geq 1}$ ist Teilfolge von u_n und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |u_{n_l} - x| \\ &\leq b_l - a_l \\ &= \underbrace{\frac{b_0 - a_0}{2^l}}_{\text{Nullfolge}} \\ \lim_{l\to\infty} u_{n_l} &\underset{3.12\text{ a) g)}}{=} x \end{aligned}$$

□

Satz 3.20. *Cauchy'sches Konvergenzkriterium: Sei $u = (u_n)_{n\geq k}$ Folge. Dann sind äquivalent*

(1) Folge u ist konvergent.

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n, m \geq n(\varepsilon) : |u_n - u_m| < \varepsilon$

Beweis. „(1) ⇒ (2)“: Sei $\lim_{n\to\infty} = c$. Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : |u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq \tilde{n}$. Dann gilt für alle $n, m \geq \tilde{n}$:

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &\leq |u_n - c| + |u_n - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

„(2) ⇒ (1)“: Wir zeigen diese Richtung in zwei Schritten:
(I). Die Folge (u_n) ist beschränkt:
Nach (2) existiert $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $|u_n - u_m| < 1$ für alle $n, m \geq n(1)$. Für alle $n \geq n(1)$ gilt:

$$|u_n| = |u_n - u_{n(1)} + u_{n(1)}|$$

$$\begin{aligned} &\leq |u_n - u_{n(1)}| + |u_{n(1)}| \\ &< 1 + |u_{n(1)}| \end{aligned}$$

Sei $M = \max\{|u_i| : i = k, \dots, n(1)\}$. Es gilt: $|u_n| < 1 + M$ für alle $n \geq k$.

(II). Nach (I) und 3.19 hat (u_n) eine konvergente Teilfolge $(u_{n_l})_{l\geq 1}$ mit $\lim_{l\to\infty} u_{n_l} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir werden zeigen: $\lim_{n\to\infty} u_n = c$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt
$\exists \tilde{n} : |u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq \tilde{n}$.
$\exists \tilde{l} : |u_{n_l} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $l \geq \tilde{l}$.
Wähle $\tilde{l}$ so groß, dass $n_{\tilde{l}} \geq \tilde{n}$. Dann gilt für alle $n \geq \tilde{n}$:

$$\begin{aligned} |u_n - c| &= |u_n - u_{n_{\tilde{l}}} + u_{n_{\tilde{l}}} - c| \\ &\leq |u_n - u_{n_{\tilde{l}}}| + |u_{n_{\tilde{l}}} - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Definition 3.21. *a) Sei $(a_l)_{l\geq k}$ eine Folge und $s_n = \sum_{l=k}^n a_l$ für $n \geq k$. Dann heißt Folge die $(s_n)_{n\geq k}$ eine* unendliche Reihe.

Schreibweise: $\sum_{l=k}^\infty a_l$.

b) Ist die Folge $(s_n)_{n\geq k}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} s_n = c$, so schreibt man $\sum_{l=k}^\infty a_l = c$ und man sagt, dass die Reihe $\sum_{l=k}^\infty a_l$ konvergiert.

c) Eine unendliche Reihe divergiert, *wenn sie nicht konvergiert.*

Man beachte: Die Schreibweise $\sum_{l=k}^\infty a_l$ hat 2 Bedeutungen:

1. Folge $(s_n)_{n\geq k}$.
2. Grenzwert, falls $(s_n)_{n\geq k}$ konvergiert.

Satz 3.22. *a) Cauchy-Kriterium für Reihen:*

$$\sum_{l=k}^\infty a_l \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n, m \geq n(\varepsilon) : \left|\sum_{l=n+1}^m a_l\right| < \varepsilon$$

b) Ist $\sum_{l=k}^\infty a_l$ konvergent, so ist $(a_l)_{l\geq k}$ eine Nullfolge.

c) Ist $a_l \geq 0$ für alle $l \geq k$ und ist die Folge (s_n) der Teilsummen $s_n = \sum_{l=k}^n a_l$ beschränkt, so ist $\sum_{l=k}^\infty a_l$ konvergent.

Beweis. a) Sei O.B.d.A. $m > n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \sum_{l=k}^{m} a_l - \sum_{l=k}^{n} a_l \right| \\ &= \left| \sum_{l=n+1}^{m} a_l \right| \end{aligned}$$

Behauptung folgt mit dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium.

b) Setze in 3.22 a): $m = n + 1$.

c) Ist $a_l \geq 0$, so gilt (s_n) ist monoton steigend. Die Behauptung folgt mit 3.9.

□

Beispiel 3.23. *a) Sei $q \in \mathbb{R}$. Ist $|q| < 1$, so gilt:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

d.h. die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ ist konvergent. Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ heißt Geometrische Reihe*.*

Lemma: Für alle $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Beweis des Lemmas:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} q^i \right) \cdot (q-1) &= \left(q^0 + q^1 + \ldots + q^n \right) \cdot (q-1) \\ &= q^1 + q^2 + \ldots + q^{n+1} - q^0 - q^1 - \ldots - q^n \\ &= q^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n} q^i \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\ \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\ &\underset{3.10}{=} \frac{-1}{q-1} \\ &= \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

Ist $|q| \geq 1$, so ist $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ divergent, denn (q^i) ist keine Nullfolge (vgl. 3.22 b)).
Beispiel: Wähle $q = \frac{1}{2}$, so ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ konvergent.

b) *Die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ *divergiert. Diese Reihe heißt* harmonische Reihe. *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= s_{2^0} \\
&= 1 \\
s_2 &= s_{2^1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \\
&\vdots \\
s_4 &= s_{2^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} \\
&> 1 + \frac{2}{2} \\
&\vdots \\
s_8 &= s_{2^3} \\
&= s_{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&> 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Allgemein gilt: $s_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$ *(per Induktion beweisbar). D.h.* (s_n) *ist unbeschränkt, daher* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ *divergiert.*

c) *Die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ *konvergiert. Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen ist beschränkt. Dann folgt die Behauptung mit 3.22 c).*

$$\begin{aligned}
s_n &\leq s_{2^n - 1} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{7^2}\right) \\
&\quad + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^n - 1)^2}\right) \\
&\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&\underset{3.23\ a)}{=} 2
\end{aligned}$$

Somit ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ *konvergent und der Grenzwert ist* ≤ 2. *Man kann zeigen:* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Es gilt auch:* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ *konvergiert, falls* $s > 1$.

d) *Die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ *konvergiert. Es gilt:*

$$s_{2n} = \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{<0} + \ldots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)}_{<0}$$

Es gilt somit $s_{2n} > s_{2n+2}$, *d.h.* (s_{2n}) *ist monoton fallende Teilfolge. Desweiteren gilt:*

$$s_{2n-1} = -1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}_{>0} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}_{>0}$$

Es gilt somit $s_{2n-1} < s_{2n+1}$, *d.h* (s_{2n-1}) *ist monoton steigende Teilfolge.*
Ist k *ungerade und* l *gerade, so* $s_k < s_l$: *Wähle ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $2 \cdot n - 1 \geq k$ *und* $2 \cdot n \geq l$, *dann gilt:*

$$\begin{aligned} s_k &\leq s_{2n-1} \\ &< s_{2n} \qquad \textit{Addition von } \frac{1}{2 \cdot n} \\ &\leq s_l \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} |s_{2n-1} - s_{2n}| &= \frac{1}{2 \cdot n} \\ \lim_{i \to \infty} s_i &= \sup\{s_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{s_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Man kann zeigen: $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \cdot \frac{1}{i} = -\ln(2) \approx -0,6931\ldots$.

Eine Verallgemeinerung des Arguments aus 3.23 d) zeigen wir im folgenden Satz.

Satz 3.24. *Leibniz-Kriterium: Sei* $(a_i)_{i \geq k}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty}(-1)^i \cdot a_i$ *konvergent.*

Satz 3.25. *Majorantenkriterium: Seien* $(a_i)_{i \geq k}$ *und* $(b_i)_{i \geq k}$ *Folgen mit* $b_i \geq 0$ *für alle* $i \geq k$ *und* $|a_i| \leq b_i$ *für alle* $i \geq k$. *Dann gilt: Ist* $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ *konvergent, so auch* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{i=k} |a_i|$.

Dabei gilt: $|\sum_{i=k}^{\infty} a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i$.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit dem Cauchy-Kriterium, siehe dazu [WHK04] 5.31 . □

Beispiel:

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot\sqrt{i}+3}$ divergiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot\sqrt{i}+3} \quad \geq \quad \underbrace{\frac{1}{i}}_{=a_i} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cdot\sqrt{i}+3 \quad \leq \quad i \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cdot\sqrt{i} \quad \leq \quad i-3 \\
&\underset{i\geq 3}{\Leftrightarrow} \quad 4\cdot i \quad \leq \quad (i-3)^2 = i^2 - 6\cdot i + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad i^2 \quad \geq \quad 10\cdot i - 9 \\
&\Leftrightarrow \quad i \quad \geq \quad 9
\end{aligned}$$

Angenommen die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot\sqrt{i}+3}$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{i=9}^{\infty} \frac{1}{2\cdot\sqrt{i}+3}$. Mit 3.25 konvergiert dann $\sum_{i=9}^{\infty} \frac{1}{i}$. Dann konvergiert aber auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Dies ist ein Widerspruch zu 3.23 b). Es folgt die Behauptung.

Definition 3.26. *Die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *heißt* absolut konvergent*, falls* $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ *konvergiert.*

Korollar 3.27. *Ist die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent, so ist die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergent.*

Beweis. Setze in 3.25 die Folgeglieder $b_i = |a_i|$. □

Man beachte: Die Umkehrung von 3.27 gilt im Allgemeinen nicht. Wir führen ein Gegenbeispiel an: Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \cdot \frac{1}{i}$ konvergiert nach 3.23 d), aber sie konvergiert nicht absolut, denn $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ konvergiert nach 3.23 b) nicht.

Satz 3.28. *Sei* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *eine Reihe.*

a) Wurzelkriterium*: Existiert ein* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q < 1$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit*

$$+\sqrt[i]{|a_i|} \quad \leq \quad q \qquad \textit{für alle } i \geq n_0$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *absolut.*

Gilt $+\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ *für unendlich viele* i*, dann divergiert die Reihe.*

b) Quotientenkriterium*: Existiert ein* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q < 1$ *und ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \quad \leq \quad q \qquad \textit{für alle } i \geq n_0$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *absolut.*

Beweis. a) Angenommen es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$ für alle $i \geq n_0$. Dann gilt $|a_i| \leq q^i$ für alle $i \geq n_0$. Die (geometrische) Reihe $\sum_{i=n_0}^{\infty} q^i$ konvergiert nach 3.23 a), somit konvergiert mit dem Majorantenkriterium (siehe 3.25) auch die Reihe $\sum_{n_0}^{\infty} |a_i|$. Da die Reihe $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$.

Gilt $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für unendlich viele i. Dann gilt $|a_i| \geq 1$ für unendlich viele i. Dann ist die Folge $(a_i)_{i \geq k}$ keine Nullfolge. Mit 3.22 b) folgt, dass die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

b) Angenommen es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q$ für alle $i \geq n_0$. Sei $i \geq n_0 + 1$, so gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_i}{a_{n_0}}\right| &= \underbrace{\left|\frac{a_i}{a_{i-1}}\right|}_{\leq q} \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}}\right|}_{\leq q} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right|}_{\leq q} \\ &\leq q^{i-n_0}\end{aligned}$$

Es gilt also $|a_i| \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^i$ für alle $i \geq n_0 + 1$. Weiter gilt:

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^i = \underbrace{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}}_{\text{konstant}} \cdot \underbrace{\sum_{i=n_0+1}^{\infty} q^i}_{\text{konvergiert}}$$

Die Reihe $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^i$ konvergiert. Mit 3.25 konvergiert die Reihe $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i|$ und somit konvergiert auch die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$.

□

Bemerkung 3.29. *a) In 3.28 reicht es nicht zu fordern $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ oder $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < 1$ für alle $i \geq n_0$, um absolute Konvergenz zu erhalten. Die harmonische Reihe (siehe 3.23) ist dafür ein Beispiel:*

Es gilt $a_i = \frac{1}{i}$. Es gilt $\frac{1}{i} < 1$ für alle $i \geq 2$ und somit $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$. Ebenso gilt $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i}{i+1} < 1$ für alle $i \geq 1$. Jedoch konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ nicht.

b) Es gilt im Allgemeinen nicht, dass aus $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \geq 1$ für unendlich viele i folgt, dass $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ divergiert.

Beispiel 3.30. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ absolut. Wir wenden das Quotientenkriterium an:*

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \left|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}\right| = \frac{|x|}{i+1} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad i &> \underbrace{2 \cdot |x| - 1}_{=n_0}\end{aligned}$$

Bemerkung:

Für die Summe von Reihen gilt: Konvergiert $\sum a_i$ (absolut) und konvergiert $\sum b_i$ (absolut), so konvergiert $\sum(a_i + b_i)$ (absolut).
Wie soll das Produkte von Reihen aussehen?
1.Möglichkeit: $\sum a_i \cdot b_i$.
Falls $\sum a_i$, $\sum b_i$ konvergiert, folgt jedoch im Allgemeinen nicht, dass $\sum a_i \cdot b_i$ konvergiert.
2.Möglichkeit: Produkt der Partialsummen; möglich, aber etwas ungemütlich.
3.Möglichkeit: Folgende Definition des Cauchy-Produkts:

Definition 3.31. *Seien $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ Reihen. Das* Cauchy-Produkt *der beiden Reihen ist definiert durch $\sum_{l=0}^{\infty} c_l$, wobei $c_l = \sum_{i=0}^{l} a_i \cdot b_{l-i}$.*

Satz 3.32. *Seien $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ absolut konvergente Reihen. Dann ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent.*

Man beachte: Die obige Folgerung gilt im Allgemeinen nicht, wenn absolute Konvergenz durch Konvergenz ersetzt wird.

Beweis. Siehe z.B. Wolff, Gloor, Richard; Analysis Alive. □

Definition 3.33. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Zahlenfolge und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt die unendliche Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

Potenzreihe *(um Entwicklungspunkt a). Wichtigster Typ ist $a = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.*

Es stellt sich die Frage für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ konvergiert. Ist $x = a$, so konvergiert Reihe mit Grenzwert a_0. Ob die Potenzreihe für andere x konvergiert hängt von der Folge (a_n) ab.

Satz 3.34. *Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$. Wir definieren:*

$$R = \begin{cases} \infty & \text{falls die Potenzreihe für alle } x \in \mathbb{R} \text{ absolut konvergiert} \\ \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \text{ konvergiert}\} \end{cases}$$

Dann gilt:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ absolut.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

c) *Ist die Folge* $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geq 0}$ *konvergent, so gilt:*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Es gilt $R = \infty$*, falls* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Die Zahl R *heißt* Konvergenzradius *der Reihe. Für* $x = R$ *bzw.* $x = -R$ *lassen sich keine allgemeinen Aussagen treffen. Das* Konvergenzintervall *der Reihe ist* $[-R,R]$ *oder* $[-R,R[$ *oder* $]-R,R]$ *oder* $]-R,R[$.

Beweis. a) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq |x_0|$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x_0|^n$ konvergiert. Die Reihe $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x_0|^n$ konvergiert mit dem Majorantenkriterium (siehe 3.25).

b) Siehe [WHK04] 5.37.

c)

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| \quad\leq\quad q \quad<\quad 1 \qquad \text{für alle } n\geq n_0\\
\underset{(*)}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)\cdot|x| \quad<\quad 1\\
\Leftrightarrow\quad & |x| \quad<\quad \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}
\end{aligned}$$

Beweis zu $(*)$:
„$\Rightarrow$“: Klar.
„$\Leftarrow$“: Sei $c = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)\cdot|x| < 1$. Wähle $q < 1$ mit $c < q$. Wähle $\varepsilon = q - c$. Dann existiert n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\left|\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| - c\right| < \varepsilon = q - c$ und somit $\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| \leq q$

□

Bemerkung 3.35. *Frage: Für welche* $x \in \mathbb{R}$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-a)^n$ *? Bestimmung des Konvergenzradius* R *von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$*. Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-a)^n$ *konvergiert absolut, falls* $|x-a| < R$*, und divergiert, falls* $|x-a| > R$*.*
Das Konvergenzintervall ist $\langle a-R, a+R\rangle$*. Dabei sind* $<$ *und* $>$ *offene oder geschlossene Intervallgrenzen, welche im einzelnen auf Konvergenz geprüft werden müssen.*
Ist $R = \infty$*, so gilt* $]a-R, a+R[= \mathbb{R}$*.*

Bemerkung 3.36. *Nachtrag: Seien* $b, c \in \mathbb{R}$*. Die Bezeichnung* $\langle b,c\rangle$ *steht für ein Intervall, bei dem nicht festgelegt ist, ob dessen Intervallgrenzen offen oder geschlossen sind.*

Beispiel 3.37. *a) Wir betrachten die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$*, d.h.* $a_n = 1$ *für alle* n *und* $a = 0$*. Es handelt sich um die geometrische Reihe (vgl. 3.23). Diese konvergiert absolut genau dann, wenn* $|x| < 1$*, d.h.* $R = 1$*. Das Konvergenzintervall ist* $]-1, 1[$*.*

Wir wenden das Quotientenkriteriums an:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| &= |x| \\ &< 1 \end{aligned}$$

D.h. Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$*. Ist* $|x| = 1$*, dann divergiert die Reihe, da dann* x^n *keine Nullfolge ist.*

b) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$*, d.h.* $a_n = \frac{1}{n!}$ *und* $a = 0$*. Mit 3.30 konvergiert die Reihe absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$*, d.h. es ist* $R = \infty$*.*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \textit{definiert Funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad \textit{Cauchy-Produkt} \end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\exp(0) = 1$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) \\ &= \exp(x-x) \\ &= \exp(x) \cdot \exp(-x) \\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \end{aligned}$$

Wir definieren die Euler'sche Zahl e *wie folgt:*

$$\mathrm{e} := \exp(1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,718\ldots$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\exp(n) &= \exp(1+\ldots+1)\\ &= \exp(1)\cdot\ldots\cdot\exp(1)\\ &= \mathrm{e}^n\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir weiter $\mathrm{e}^x := \exp(x)$. Somit erhalten wir mit den obigen Rechenregeln $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Eine andere Darstellung der Euler'schen Zahl e *ist:*

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Siehe Hackenberger, 14.1.16.

Bedeutung der obigen Gleichung:
1. Kapital G mit 100% Verzinsung pro Jahr. Am Ende des Jahres: $2\cdot G = G\cdot(1+1)$.
2. 50% für jedes halbe Jahr (Zinseszins). Nach einem Jahr: $G\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2}) = G\cdot(1+\frac{1}{2})^2 = 2,25\cdot G$.
3. $\frac{100}{n}$% im gleichen Zeitraum von $\frac{1}{n}$ Jahr, $G\cdot(1+\frac{1}{n})^n$, $G\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}\cdot G \approx 2,718\cdot G$.

c) Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n$, wobei

$$c_n = \begin{cases}0 & \textit{falls } n \textit{ gerade}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{n!} & \textit{falls } n \textit{ ungerade}\end{cases}$$

Der Konvergenzradius ist $R = \infty$:
Es gilt: $|c_n| \le \frac{1}{n!}$, also $|c_n\cdot x^n| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Mit dem Majorantenkriterium und der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Weiter kann zeigen, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!} = \sin(x) \qquad \text{Sinus-Reihe}$$

Siehe [WHK04], s.178ff.

d) Man kann zeigen, dass für die Cosinus-Reihe *gilt:*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

Man kann zeigen, dass der Konvergenzradius $R = \infty$ ist.

4 Reelle Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.1. *Eine* reelle Funktion f einer Veränderlichen *ist eine Abbildung einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dabei ist D der* Definitionsbereich *von f.*

In der Regel ist D ein Intervall (gegebenfalls auch ganz $\mathbb{R}$) oder Vereinigung von endlichen Intervallen.

Beispiel 4.2. *a) Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in \mathbb{R}[x]$. Die Abbildung f ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot t^i$. Diese Funktion nennt man* Polynomfunktion *oder* ganzrationale Funktion.

Man Beachte: Seien $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit $f \neq g$, so ist die Polynomfunktion zu f und g ebenfalls verschieden:
Angenommen $f(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(f-g)(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es gilt $f - g \in \mathbb{R}[x]$ und $f - g = 0$, da jedes Polynom ungleich 0 nur endlich viele Nullstellen hat (siehe 1.39). Somit gilt $f = g$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Schreibweise: Polynom statt Polynomfunktion.

Wichtige Spezialfälle:
Sei $c \in \mathbb{R}$. Ist $f(x) = c$, so heißt f konstante Funktion.
Ist $f(x) = x$, so heißt f identische Funktion.

b) Sei f Funktion mit $f : D \to \mathbb{R}$. Der Absolutbetrag *von f ist definiert durch:*

$$|f| : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{cases}$$

c) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir definieren

$$f \pm g : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \pm g(x) \end{cases} \qquad \text{Summe/Differenz}$$

Desweiteren definieren wir:

$$f \cdot g : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases} \qquad \text{Produkt}$$

d) *Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Sei* $D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\} \subseteq D$. *Wir definieren:*

$$\frac{f}{g} : \begin{cases} D_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \qquad \text{Quotient}$$

Sind f *und* g *Polynomfunktionen, so heißt* $\frac{f}{g}$ (gebrochen) rationale Funktion.
Beispiel: $h(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 7}{x^2 - 5x + 2}$.

e) *Seien* $f : D_1 \to \mathbb{R}$ *und* $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *Funktionen, wobei* $f(D_1) \subseteq D_2$. *Wir definieren:*

$$g \circ f : \begin{cases} D_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases} \qquad \text{Hintereinanderausführung}$$

f) *Potenzreihen definieren auf ihrem Konvergenzintervall Funktionen. Beispiel:*

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \end{cases}$$

g) *Sei* $f(x) = \exp(x)$ *und* $g(x) = x^2 + 1$, *so gilt:*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(\exp(x)) \\ &= (\exp(x))^2 + 1 \\ &= (\mathrm{e}^x)^2 + 1 \\ &= \mathrm{e}^{2 \cdot x} + 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(x^2 + 1) \\ &= \exp(x^2 + 1) \\ &= \mathrm{e}^{x^2+1} \end{aligned}$$

h) *Wir betrachten die Funktionen* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Es gilt:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \sin(x) & = & \sin(x + k \cdot 2 \cdot \pi) & & \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \\ & & \cos(x) & = & \cos(x + k \cdot 2 \cdot \pi) & & \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \\ & & -1 \leq & \sin(x) & \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} & \\ & & -1 \leq & \cos(x) & \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} & \\ \sin(0) & = & \sin(\pi) & = & \sin(2 \cdot \pi) & = & 0 \\ & & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 1 & & \\ & & \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = & -1 & & \end{array}$$

Definition 4.3. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$.

a) *Ein Element* $c \in \mathbb{R}$ *heißt* Adhärenzpunkt *(Berührungspunkt) in* D*, falls mindestens eine Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$ *existiert mit* $a_n \in D$ *für alle* $n \geq 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

b) *Wir definieren:*

$$\overline{D} \quad := \quad \textit{Menge aller Adhärenzpunkte } D \ / \ \text{Abgeschlossene Hülle } \textit{von } D$$

Dabei gilt $D \subseteq \overline{D}$*: Sei* $c \in D$*. Wähle* $(a_n)_{n\geq 0}$ *mit* $a_n = c$ *für alle* $n \geq 0$*, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

c) *Die Menge* D *heißt* abgeschlossen*, falls gilt* $D = \overline{D}$.

Wir unterscheiden die Adhärenzpunkte von D *wie folgt:*

- *Häufungspunkte von* D*: Ein Punkt* $c \in \mathbb{R}$ *ist ein Häufungspunkte von* D*, falls* $\forall \varepsilon > 0 : [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap D$ *enthält unendlich viele Punkte.*
- *Isolierte Punkte von* D*: Ein Punkt* $c \in \mathbb{R}$ *ist ein isolierter Punkt von* D*, falls* $\exists \varepsilon > 0$*:* $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap D = \{c\}$.

Beispiel: $D =]0,1[\cup \{2\}$.

Beispiel 4.4. a) *Sei* $D = \langle a, b\rangle$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$*. Dann gilt:* $\overline{D} = [a, b]$.

b) *Sei* J *ein Intervall mit* $x_1, \ldots, x_n \in J$*. Sei* $D = J \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$*, so gilt* $\overline{D} = \overline{J}$.

c) *Es gilt* $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$.

d) *Es gilt* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*, siehe 2.15 a) und 3.12 a).*

Definition 4.5. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $c \in \overline{D}$*. Die Zahl* $d \in \mathbb{R}$ *heißt* Grenzwert von $f(x)$ für x gegen c*, bezeichnet als* $\lim_{x\to c} f(x) = d$*, falls gilt:*
Für alle Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ *mit* $a_n \in D$*, die gegen* c *konvergieren, konvergiert die Folge* $(f(a_n))_{n\geq 0}$ *gegen* d.

Beispiel 4.6. a) *Sei* $f(x) = x^2$ *und* $D = \mathbb{R}$*. Was ist* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *? Sei* $(a_n)_n$ *eine beliebige Folge mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n^2 \\ &\underset{3.12\ b)}{=} \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Somit existiert der Grenzwert und es gilt $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$*. Analog kann man zeigen* $\lim_{x\to c} f(x) = c^2 = f(c)$.
Allgemein gilt mit 3.12: Ist f *eine Polynomfunktion und* $c \in \mathbb{R}$*, dann gilt* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

b) *Wir betrachten folgende reelle Funktion f mit*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Frage: Existiert Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$?
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
Die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $b_n = 0$ für alle n konvergiert gegen 0. Es gilt hier jedoch $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht.

c) *Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x)$?*
Es gilt $1 \in \overline{D} = \mathbb{R}$. Auf D stimmt $f(x)$ mit $x+1$ überein, da $(x+1)\cdot(x-1) = x^2-1$.
Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in D$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} (a_n + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Somit existiert der Grenzwert und es ist $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

d) *Sei f reelle Funktion mit*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Es gilt beispielsweise $\lim_{x\to -17} f(x) = 0$. Existiert der Grenzwert für x gegen 0 ?
Die Folge $(a_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ konvergiert gegen 0. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Die Folge $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergiert gegen 0. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1$. Somit existiert Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht.

e) *Sei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?*
Die Folge $a_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ konvergiert gegen 0. Es gilt
$f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(n\cdot\pi) = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.
Die Folge $a_n = \frac{1}{\frac{4\cdot n+1}{2}\cdot\pi}$ konvergiert gegen 0. Es gilt
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{4\cdot n+1}{2}\cdot\pi\right) = 1$.
Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht.

f) *Sei $f(x) = x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$?*
Sei (a_n) eine Folge, die gegen 0 konvergiert mit $a_n \neq 0$ für alle n. Dann ist $f(a_n) = a_n \cdot \sin\left(\frac{1}{a_n}\right)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} |f(a_n) - 0| &= |f(a_n)| \\ &= \left|a_n \cdot \sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |a_n| \cdot 1 \qquad , \textit{ da } \left|\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right| \leq 1 \\ &= |a_n| \end{aligned}$$

Mit 3.12 a) g) gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. *Somit gilt* $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Satz 4.7. *Rechenregeln für Grenzwerte: Alle auftretenden Funktionen seien auf D definiert und es sei $c \in \overline{D}$. Weiter sei vorausgesetzt, dass alle Grenzwerte der linken Seite der Gleichungen existierten. Dann existieren die Grenzwerte auf der rechten Seite und es gilt:*

a)

$$\lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x))$$

b)

$$\lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x))$$

c) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, so gilt:

$$\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

d)

$$\left|\lim_{x\to c} f(x)\right| = \lim_{x\to c} |f(x)|$$

Beweis. a) Sei (a_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Sei $\lim_{x\to c} f(x) = d$ und $\lim_{x\to c} g(x) = e$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(f(a_n) \pm g(a_n)) \underset{3.12\text{ c)}}{=} d \pm e$.

b)-d) Analog.

□

Satz 4.8. *ε-δ-Kriterium: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $c \in \overline{D}$. Dann sind äquivalent:*

1) $\lim_{x\to c} f(x) = d$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D$ *mit* $|x - c| \leq \delta$ *gilt* $|f(x) - d| \leq \varepsilon$

Beweis. „1) $\Rightarrow$ 2)“: Angenommen 1) gilt, aber 2) nicht. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ (z.B. $\delta = \frac{1}{n}$) ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - d| > \varepsilon$. Mit 3.12 a) g) gilt $(x_n) \to c$, aber $f(x_n) \not\to d$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„2) $\Rightarrow$ 1)“: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in D$ für alle n mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = d$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$: $\forall x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - d| \leq \varepsilon$. Zu diesem δ existiert $n_0 = n_0(\delta)$ mit $|a_n - c| \leq \delta$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt: $|f(a_n) - d| \leq \varepsilon$. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = d$. □

Beispiel 4.9. *Sei $f(x) = x^2$ und $c = 2$. Es gilt $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ nach 4.6 a). Wir wollen diesen Grenzwert ebenfalls mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium zeigen: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:*

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= |x^2 - 4| \\ &= |x - 2| \cdot |x + 2| \end{aligned}$$

Wie muss man δ wählen? Ist $|x - 2| \leq \delta$, so gilt:

$$\begin{aligned} |x + 2| &= |(x - 2) + 4| \\ &\underset{2.8}{\leq} |x - 2| + |4| \\ &= |x - 2| + 4 \\ &\leq \delta + 4 \end{aligned}$$

Weiter gilt $|f(x) - 4| \leq \delta \cdot (\delta + 4)$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$, dann gilt $\delta \cdot (\delta + 4) \leq 5 \cdot \delta \leq \varepsilon$. Beispiel: Ist $\varepsilon = 20$, so wähle $\delta = 1$. Ist $\varepsilon = 0{,}01$, so wähle $\delta = 0{,}002$.

Definition 4.10. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $D = \langle b, \infty\rangle$ (z.B. $D = \mathbb{R}$). Die reelle Funktion $f(x)$* konvergiert gegen $d \in \mathbb{R}$ für x gegen ∞*, $\lim_{x\to\infty} f(x) = d$, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists L = L(\varepsilon) \in D\ \forall x \geq L : |f(x) - d| \leq \varepsilon$*

Entsprechend definieren wir $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Beispiel 4.11. *a) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, wobei $D =]0, \infty[$: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $L = \frac{1}{\varepsilon}$. Für alle $x \geq L$ gilt:*

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - 0\right| &= \frac{1}{x} \\ &\leq \frac{1}{L} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

b) Allgemein gilt: Seien $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ von Grad k und l mit $P(x) = a_k \cdot x^k + \ldots + a_0$ und $Q(x) = b_l \cdot x^l + \ldots + b_0$. Sei $l \geq k$, so gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & l > k \\ \frac{a_k}{b_k} & l = k \end{cases}$$

Dies lässt sich analog zum entsprechenden Beweis für Folgen $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\geq 1}$ nachweisen.

Bemerkung 4.12. *Die Rechenregeln aus 4.7 gelten auch für $x \to \infty$ (anstelle $x \to c$) oder $x \to -\infty$. Man beachte dabei, dass die Grenzwerte endlich sind.*

Definition 4.13. *a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $c \in \overline{D}$, d.h. $c \in \mathbb{R}$. Die reelle Funktion $f(x)$* divergiert (bestimmt) gegen ∞ für x gegen c, *$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, falls gilt: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in D$ mit $|x - c| < \delta$ gilt: $f(x) \geq M$.*

b) Sei $f :< b, \infty[\to \mathbb{R}$. Die reelle Funktion $f(x)$ divergiert (bestimmt) gegen ∞ für x gegen ∞, *$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls gilt: $\forall M > 0\ \exists L \in D\ \forall x \geq L : f(x) \geq M$.*

Entsprechend definiert man: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Satz 4.14. *a) Ist $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

b) Ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.
Ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ oder $-\infty$, so $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

c) Ist $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ und es existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - \delta, c + \delta] \cap D$, so $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
Ist $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ und es existiert $\delta > 0$ mit $f(x) < 0$ für alle $x \in [c - \delta, c + \delta] \cap D$, so $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

d) Ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und es existiert T mit $f(x) > 0$ für alle $x \geq T$, so $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
Ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und es existiert T mit $f(x) < 0$ für alle $x \geq T$, so $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

e) Ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und es existiert T mit $f(x) > 0$ für alle $x \leq T$, so $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
Ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und es existiert T mit $f(x) < 0$ für alle $x \leq T$, so $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Beweis. Wir beweisen beispielhaft c): Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in [c - \sigma, c + \sigma] \cap D$. Voraussetzung: $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Zeige: $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
Sei $M > 0$. Dann existiert δ mit $|f(x) - 0| = |f(x)| \leq \frac{1}{M}$ für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$. Dies folgt aus dem ε-δ-Kriterium, da $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ist.
Sei O.B.d.A. $\delta \leq \sigma$. Dann $f(x) > 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$, da $\delta \leq \sigma$. Dann gilt für diese x: $0 < f(x) \leq \frac{1}{M}$. Dann $M \leq \frac{1}{f(x)}$ für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$. □

Beispiel 4.15. *a) Sei $P(x) = a_k \cdot x^k + \ldots + a_0$ mit $k > 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty & a_k > 0 \\ -\infty & a_k < 0 \end{cases}$$

Desweiteren gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} \infty & (a_k > 0 \text{ und } k \text{ gerade}) \text{ oder } (a_k < 0 \text{ und } k \text{ ungerade}) \\ -\infty & (a_k > 0 \text{ und } k \text{ ungerade}) \text{ oder } (a_k < 0 \text{ und } k \text{ gerade}) \end{cases}$$

Sei $a_k > 0$. *Zeige:* $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$.
Sei $M > 0$. *Zeige: Es existiert* L *mit* $P(x) \geq M$ *für alle* $x \geq L$.

$$\begin{aligned} P(x) &= a_k \cdot x^k + \ldots + a_0 \\ &\geq a_k \cdot x^k - |a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_0| \\ &\geq a_k \cdot x^k - (|a_{k-1}| \cdot |x^{k-1}| + \ldots + |a_0|) \end{aligned}$$

Für $x \geq \max(1, |a_0|, \ldots, |a_{k-2}|)$ *gilt:*

$$\begin{aligned} & a_k \cdot x^k - (|a_{k-1}| \cdot |x^{k-1}| + \ldots + |a_0|) \\ \geq\ & a_k \cdot x^k - (|a_{k-1}| \cdot x^{k-1} + (k-1) \cdot x^{k-1}) \\ =\ & x^{k-1} \cdot (a_k \cdot x - |a_{k-1}| + (k-1)) \\ \geq\ & a_k \cdot x - |a_{k-1}| - (k-1) \\ \underset{(*)}{\geq}\ & M \end{aligned}$$

$(*)$ *gilt, wenn* $x \geq \frac{M+|a_{k-1}|+(k-1)}{a_k}$.
Setze $L = \max(1, |a_0|, \ldots, |a_{k-2}|, M + |a_{k-1}| + (k-1))$.

b) *Sei* $P(x) = a_k \cdot x^k + \ldots + a_0$ *und* $Q(x) = b_l \cdot x^l + \ldots + b_0$ *mit* $k > l$. *Dann gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & a_k \text{ und } b_l \text{ haben gleiches Vorzeichen} \\ -\infty & a_k \text{ und } b_l \text{ haben unterschiedliches Vorzeichen} \end{cases}$$

Folgt mit a) aus 4.14 d) und 4.14 b).

c) *Sei* $f(x) = \frac{1}{x}$ *mit* $D =]0, \infty[$, *so gilt* $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.
Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ *mit* $D =]-\infty, 0[$, *so gilt* $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ *mit* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *dann existiert* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *nicht (auch nicht* ∞ *oder* $-\infty$*).*

d) *Sei* $f(x) = \frac{1}{|x|}$ *mit* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *so gilt* $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

e) *Sei* $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$. *Es gilt* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *Sei* $M > 0$. *Sei* $x > 0$. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} e^x &= \exp(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &> \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} &> \frac{x^{n+1}}{x^n \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{x}{(n+1)!} \\ &> M \qquad \textit{falls } x > M \cdot (n+1)! \end{aligned}$$

Mit 4.14 a) kann man folgern, dass gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^n} = 0$.

5 Stetigkeit

Definition 5.1. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

a) Sei $c \in D$. Die reelle Funktion f heißt stetig in c, *falls* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

b) Die reelle Funktion f heißt stetig auf D, *falls f in jedem $c \in D$ stetig ist.*

Satz 5.2. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion und $c \in D$. Dann sind äquivalent:*

a) Die reelle Funktion f ist stetig in c.

b) Für jede Folge (a_n), $a_n \in D$ für alle n, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ist $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$.

c) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: Für alle $x \in D$ mit $|x - c| \leq \delta$ gilt $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$.

Beispiel 5.3. *a) Jedes Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Dies folgt aus Beispiel 4.6 a).*

b) Sei $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty[$. Die reelle Funktion f ist stetig auf D:
Sei $c \in D = [0, \infty[$. Sei $\varepsilon > 0$. Ist $c = 0$: Aus $|x - 0| = |x| = x \leq \varepsilon^2$ folgt $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq \varepsilon$. Daher wähle $\delta = \varepsilon^2$. Ist $c > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |x - c| &= |\sqrt{x} - \sqrt{c}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{c}| \\ &\geq |\sqrt{x} - \sqrt{c}| \cdot \sqrt{c} \end{aligned}$$

Es gilt also $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot |x - c|$. Wähle $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{c}$. Aus

$$\begin{aligned} |x - c| &\leq \delta \\ &= \varepsilon \cdot \sqrt{c} \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot |x - c| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

folgt $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot |x - c| \leq \varepsilon$.

c) Sei f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Die reelle Funktion f ist nicht stetig in 0 : Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \neq 0 = f(0)$.

d) Sei f gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Die reelle Funktion f ist nicht stetig in 0 : Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht (vgl. 4.6 e)).

e) Sei f gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Mit 4.6 f) gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Somit ist die reelle Funktion f stetig in 0.

Satz 5.4. *Rechenregeln für Stetigkeit: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, die in $c \in D$ stetig sind. Dann wird jeweils $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $|f|$ in c stetig. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ in c stetig.*

Satz 5.5. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) = D'$. Sind f ung g stetig (auf D bzw. auf D'), so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D.*

Beweis. Sei $c \in D$. Sei (a_n) Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \in D'$. Da g stetig an Stelle $f(c) \in D'$, folgt $\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(c))$. Also gilt $\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(c)$. □

Beispiel 5.6. *Sei $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x^2-1|}}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Mit 5.3 b), 5.4 und 5.5 folgt, dass die reelle Funktion f stetig ist auf D.*

Theorem 5.7. *Nullstellensatz für stetige Funktionen: Sei $f : D = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ stetige reelle Funktion und seien $u, v \in D$ mit $u < v$. Es gelte: $f(u) \cdot f(v) < 0$. Dann gibt es ein w mit $u < w < v$ und $f(w) = 0$.*

Beweis. Sei O.B.d.A. $f(u) < f(v)$ (ansonsten ersetze f durch $-f$). Die Anwendung des Bisketionsverfahrens leifert:

```
a ← u,   b ← v
while true do
    c ← (a+b)/2
    if f(c) < 0 then
        a ← c
    else
        b ← c
    end if
end while
```

Sei w die durch das Bisektionsverfahren eindeutig bestimmte Zahl. Für die Folgen (a_n) und (b_n) gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq w \leq b_{n+1} \leq b_n$ und $0 < b_n - a_n = (v-u) \cdot 2^{-n}$. Weiter gilt $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n.
Es gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = w$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(w) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Da $f(a_n) < 0$, folgt mit 3.12 f) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$. Da $f(b_n) \geq 0$, folgt mit 3.12 f) $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Somit gilt $f(w) = 0$. □

Korollar 5.8. *a) Sei $f : J = \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ stetig und seien $u, v \in J$ mit $u < v$. Dann nimmt f auf $[u,v]$ jeden zwischen $f(u)$ und $f(v)$ liegenden Wert an (und gegebenfalls noch weitere).*

b) Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder ein Intervall. Man beachte, dass dabei im Allgemeinen nicht gilt $f([u,v]) = [f(u), f(v)]$.

Beweis. a) Angenommen es gelte $f(u) < f(v)$ und $f(u) < c < f(v)$. Wir betrachten die Funktion $g(x) = f(x) - c$, welche stetig ist. Es gilt $g(u) < 0$ und $g(v) > 0$. Mit 5.7 gilt $\exists w$ mit $u < w < v$ und $g(w) = 0$. Also $f(w) = c$.

b) Folgt aus 5.8 a): Mit 2 Punkten auf $f(J)$, J Intervall, liegen alle dazwischen liegenden Punkte in $f(J)$. Also ist $f(J)$ Intervall.

□

Theorem 5.9. *Minimax-Theorem: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $K = [a,b]$ Intervall (wichtig: K abgeschlossen). Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf K, d.h. es existiert $x_{\max}, x_{\min} \in K$ mit*

$$\begin{aligned} f(x_{\max}) &\geq f(x) \qquad \forall x \in K \\ f(x_{\min}) &\leq f(x) \qquad \forall x \in K \end{aligned}$$

Definition 5.10. *Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* (streng) monoton wachsend, *falls gilt: Ist $x, y \in D$ mit $x < y$, so gilt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$).*
Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton fallend, *falls gilt: Ist $x, y \in D$ mit $x < y$, so gilt $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$).*
Ist f (streng) monoton wachsend oder fallend, so heißt f (streng) monoton.

Man beachte: Streng monotone reelle Funktionen sind injektiv.

Satz 5.11. *Sei J ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ stetige reelle Funktion. Dann gilt:*

$$f \text{ ist injektiv auf } J \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist streng monoton auf } J$$

Theorem 5.12. *Sei J ein Intervall und $f : J \to f(J) =: J'$ eine stetige, streng monotone (also bijektive) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J' \to J$ stetig.*

Beweis. Siehe [WHK04], Theorem 6.25. □

Korollar 5.13. *a) Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}_+$, wobei $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Also ist die Umkehrfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ stetig von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}_+$.*

b) Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist $f(x) = x^n$ stetig und bijektiv von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ ist stetig von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$.

Satz 5.14. *Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-a)^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist $f(x)$ stetig auf $]a - R, a + R[$.*

Beispiel 5.15. *Die Funktionen/Potenzreihen $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.*

Satz 5.16. *Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und stetig, also bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt $\ln(x) :]0, \infty[\to \mathbb{R}$,* Logarithmus naturalis. *Sie ist stetig und auf $]0, \infty[$ streng monoton wachsend. Es gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$. Außerdem gilt $\ln(1) = 0$.*

Beweis. Mit 5.12 folgt, dass die Funktion ln stetig und bijektiv ist. Es gilt $\ln(1) = 0$, da $\exp(0) = 1$. Es gilt $\ln(\mathrm{e}) = 1$, da $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2,7\ldots$. Mit 5.11 folgt, dass die Funktion ln streng monoton wachsend ist. Seien $x, y > 0$. Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\exp(a) = x$, $\exp(b) = y$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) \\ &= \ln(\exp(a + b)) \\ &= a + b \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

Definition 5.17. *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Setze $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist $a = \mathrm{e}$, so gilt $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.*

Satz 5.18. *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.*

a) Die reelle Funktion $a^x : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend, falls $a < 1$.

b) Es gilt $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt a^n mit normaler n-ten Potenz von a überein. Desweiteren gilt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Beweis. a) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$, also a^x streng monoton wachsend, da exp streng monoton wachsend. Für $0 < a < 1$ ist $\ln(a) < 0$, dann ist a^x streng monoton fallend.

b) Die Gleichung $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ folgt aus der entsprechenden Gleichung für exp:

$$\begin{aligned}(a^x)^y &= \exp\left(y \cdot \ln\left(a^x\right)\right)\\ &= \exp(y \cdot \ln(\exp(x \cdot \ln(a))))\\ &= \exp(y \cdot x \cdot \ln(a))\\ &= a^{x \cdot y}\end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}\exp(n \cdot \ln(a)) &= \exp(\ln(a) + \underbrace{\ldots}_{\leftarrow n \rightarrow} + \ln(a))\\ &= \exp(\ln(a)) \cdot \underbrace{\ldots}_{\leftarrow n \rightarrow} \cdot \exp(\ln(a))\\ &= a^n \qquad \text{normale } n\text{-te Potenz}\end{aligned}$$

Mit 5.18 b) gilt $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$. Daraus folgt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

□

Definition 5.19. *Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$, heißt die Umkehrfunktion von a^x der* Logarithmus zur Basis *a und wird mit $\log_a(x)$ bezeichnet.*

Beispiel: Ist $a = e$, so $\log_{\mathrm{e}} = \ln$. Ist $a = 2$, so $\log_2$. Ist $a = 10$, so $\log_{10}$.

Satz 5.20. *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y)\\ \log_a(x^y) &= y \cdot \log_a(x) \qquad \textit{für alle } x, y > 0\end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus Satz 5.18. □

6 Differenzierbare Funktionen

Definition 6.1. *Sei J ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $c \in J$.*

a) Die Funktion f heißt differenzierbar *oder* ableitbar *an der Stelle c, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existiert.

Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung *oder* Differentialquotient *von f an der Stelle c und wird bezeichnet durch $f'(c)$. oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$*

b) Die Funktion f heißt differenzierbar auf J, falls sie in allen $c \in J$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$f' \quad : \quad \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

heißt Ableitung *von f.*

Beispiel 6.2. *Sei $f(x) = a \cdot x^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Für $x \neq c$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(c)}{x - c} &= \frac{a \cdot x^n - a \cdot c^n}{x - c} \\
&= \frac{a \cdot (x^n - c^n)}{x - c} \\
&= \frac{a \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot c + \ldots + x \cdot c^{n-2} + c^{n-1})(x - c)}{x - c} \\
&= a \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot c + \ldots + x \cdot c^{n-2} + c^{n-1}) \\
\lim_{x \to c} \frac{a \cdot x^n - a \cdot c^n}{x - c} &= \lim_{x \to c} a \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot c + \ldots + x \cdot c^{n-2} + c^{n-1}) \\
&= a \cdot n \cdot c^{n-1}
\end{aligned}$$

Also ist $f'(c) = a \cdot n \cdot c^{n-1}$ und die Ableitungsfunktion ist $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.

Satz 6.3. *Sei J ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $c \in J$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Die Funktion f ist in c differenzierbar.

b) Es gibt eine Funktion $R : J \to \mathbb{R}$, stetig in c mit $R(c) = 0$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad = \quad f(c) + d \cdot (x - c) + R(x) \cdot (x - c) \qquad \textit{für alle } x \in J$$

Dabei ist $f(c) + d \cdot (x - c)$ die Gerade durch $(c, f(c))$ mit Steigung d, „Tangente“.

c) Es gibt eine Funktion $S : J \to \mathbb{R}$, stetig in c mit

$$f(x) \quad = \quad f(c) + \underbrace{S(x)}_{\textit{Steigung der Sekante durch } (c,f(c)),\ (x,f(x))} \cdot (x - c)$$

Man beachte: In b) gilt $d = f'(c)$ und in c) gilt $S(c) = f'(c)$.

Beweis. „a) $\Rightarrow$ b)“: Setze

$$R(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} R(x) \quad &= \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \\ &= \quad R(c) \end{aligned}$$

Setze $d = f'(c)$.

„b) $\Rightarrow$ c)“: Setze $S(x) = R(x) + d$. $S(x)$ ist stetig in c, wobei $S(c) = d = f'(c)$.

„c) $\Rightarrow$ a)“: Ist $x \neq c$, dann gilt:

$$S(x) \quad = \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Die Funktion S ist stetig in c, daraus folgt $\lim_{x\to c} S(x) = S(c)$. D.h. der Grenzwert $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert. Also $f'(c) = S(c)$. ☐

Korollar 6.4. *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ in c differenzierbar. Dann ist f stetig in c.*

Beweis. Mit 6.3 c) gilt $f(x) = f(c) + S(x) \cdot (x - c)$, wobei $\lim_{x\to c} S(x) = S(c)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) \quad &= \quad \lim_{x \to c} (f(c) + S(x) \cdot (x - c)) \\ &= \quad f(c) \end{aligned}$$

☐

Bemerkung:

Die Umkehrung von 6.4 gilt im Allgemeinen nicht: Sei $f(x) = |x|$. Die Funktion f ist stetig in 0, aber nicht differenzbierbar in 0. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht: Ist $x < 0$, so $\frac{|x|}{x} = -1$. Ist $x > 0$, so $\frac{|x|}{x} = 1$.

Satz 6.5. *Ableitungsregeln: Sei J ein Intervall und $c \in J$. In a) bis c) seien $f, g : J \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen.*

a) *Linearität der Ableitung:*
Seien f, g differenzierbar in c und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ differenzierbar in c und es gilt $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g'$.

b) *Produktregel:*
Seien f, g differenzierbar in c. Dann ist auch $f \cdot g$ differenzierbar in c und es gilt $(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$.

c) *Quotientenregel:*
Seien f, g differenzierbar in c und sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in c und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) \quad = \quad \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g(c)^2}$$

d) *Kettenregel:*
Sei die Funktion $f : J \to J_1$ in c differenzierbar. Sei die Funktion $g : J_1 \to \mathbb{R}$ in $f(c)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle c differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(c) \quad = \quad g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch b): Mit 6.3 existieren stetige Funktionen S_f, S_g mit $f(x) = f(c) + S_f(x) \cdot (x - c)$ und $g(x) = g(c) + S_g(x) \cdot (x - c)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & f(x) \cdot g(x) \\ = \quad & f(c) \cdot g(c) + (\underbrace{f(c) \cdot S_g(x) + g(c) \cdot S_f(x) + S_f(x) \cdot S_g(x) \cdot (x - c)}) \cdot (x - c) \\ =: \quad & S(x) \qquad \text{stetig in } c \end{aligned}$$

Mit 6.3 gilt: $f \cdot g$ ist differenzierbar in c. Es gilt:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(c) \quad &= \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} \\ &= \quad \lim_{x\to c} S(x) \\ &= \quad f(c) \cdot S_g(c) + g(c) \cdot S_f(c) \\ &\underset{6.3}{=} \quad f(c) \cdot g'(c) + g(c) \cdot f'(c) \end{aligned}$$

□

Satz 6.6. *Sei f eine stetige, streng monotone Funktion auf dem Intervall J. Sei $J_1 = f(J)$. Sei f differenzierbar in $c \in J$ und $f'(c) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J_1 \to J$ in $f(c)$ differenzierbar und es gilt:*

$$(f^{-1})'(f(c)) \quad = \quad \frac{1}{f'(c)}$$

Ist f in J differenzierbar, $f'(y) \neq 0$ für alle $y \in J$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) \quad = \quad \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

für alle $x \in J_1$.

Beweis. Es gilt $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Die Funktion f^{-1} ist an der Stelle $f(c)$ differenzierbar. Mit 6.5 gilt $(f^{-1} \circ f)'(c) = (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel:

Die Bedingung $f'(c) \neq 0$ in 6.6 notwendig: Sei $f(x) = x^3$, $J = \mathbb{R}$ und $c = 0$. Es gilt $f'(x) = 3 \cdot x^2$ und $f'(0) = 0$. Die Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist in 0 nicht differenzierbar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Beispiel 6.7. *a) Sei $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ und $J =]0, \infty[$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{6.5\ c)}{=} \frac{0 \cdot x^n - n \cdot x^{n-1} \cdot 1}{x^{2 \cdot n}} \\ &= -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \\ &= -n \cdot x^{-n-1} \end{aligned}$$

b) Sei $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$. Dann gilt:

$$f'(x) \underset{6.5\ d)}{=} 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2 \cdot x + 1)$$

Definition 6.8. *Die reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat ein* lokales Maximum/Minimum *in $c \in D$, falls ein Intervall $J = [c - \delta, c + \delta] \subseteq D$ existiert, $\delta > 0$, so dass $f(c) \geq f(x)$ (bzw. $f(c) \leq f(x)$) für alle $x \in J$.*

Satz 6.9. *Ist die reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat f in $c \in D$ ein lokales Maximum oder Minimum (lokales Extremum), so gilt $f'(c) = 0$.*

Beweis. Sei O.B.d.A. $f(c)$ ein lokales Maximum.
Sei $a_n < c$ Folge mit $(a_n) \to c$ und $a_n \in J$ für alle n. Dann gilt $f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c}$.
Es gilt $f(a_n) - f(c) \leq 0$, da $a_n \in J$ und $f(c)$ lokales Maximum. Also gilt $\frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c} \geq 0$ für alle n. Daraus folgt $f'(c) \geq 0$.
Sei $b_n > c$ Folge mit $(b_n) \to c$ und $b_n \in J$ für alle n. Dann gilt analog $f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-c} \leq 0$. Somit gilt $f'(c) = 0$. □

Satz 6.10. *Satz von Rolle: Sei $J = [a, b]$ ein Intervall und sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine auf J stetige reelle Funktion und differenzierbar in $]a, b[$. Sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert (mindestens ein) $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Ist f konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$. Sei also f nicht konstant. Da f differenzierbar ist, ist f mit 6.4 auch stetig. Mit 5.9 hat f in $[a, b]$ eine globale Maximum- bzw. Minimum-Stelle, $x_{\max}$, $x_{\min}$. Dabei ist $x_{\max} \neq x_{\min}$, da f nicht konstant. Aus $f(a) = f(b)$ folgt, mindestenes eine der beiden Zahlen $x_{\min}$ oder $x_{\max}$ liegt in $]a, b[$, wähle diese als c. Mit 6.9 folgt $f'(c) = 0$. □

Satz 6.11. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $J = [a, b]$ ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ in J stetige und in $]a, b[$ differenzierbare reelle Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis. Sei $S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Sei $h(x) = f(x) - S(x)$. Es gilt $h(a) = 0 = h(b)$ und $h(x)$ ist differenzierbar in $]a, b[$. Mit 6.10 gilt $\exists c \in]a, b[$: $h'(c) = 0$. Weiter gilt $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und somit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Korollar 6.12. *Sei $J = [a, b]$ ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ eine in J stetige und in $[a, b[$ differenzierbare reelle Funktion. Dann gilt:*

a) $f'(x) = 0\ \forall x \in J \quad \Leftrightarrow \quad f$ *konstant auf* J

b) *Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f monoton wachsend auf J.*
Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f monoton fallend auf J.

c) *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend auf J.*
Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton fallend auf J.

Beweis. Sei $u, v \in [a, b]$ mit $u < v$. Wende 6.11 auf $[u, v]$ an: $\exists c \in]u, v[$ mit $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(c)$.

a) „$\Leftarrow$“: Klar.
„$\Rightarrow$“: $\forall u, v \in [a, b]$ gilt: $f(v) = f(u)$, da $f'(c) = 0$.

b) $\forall u, v \in [a,b]$ gilt: $f(v) \geq f(u)$ bzw. $f(v) \leq f(u)$.

c) $\forall u, v \in [a,b]$ gilt: $f(v) > f(u)$ bzw. $f(v) < f(u)$.

$\square$

Satz 6.13. *2.Mittelwertsatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$. Es gelte entweder $g'(x) > 0 \; \forall x \in\,]a,b[$ oder $g'(x) < 0 \; \forall x \in\,]a,b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in\,]a,b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Man beachte: Der Satz 6.11 ist ein Spezialfall mit $g(x) = x$.

Beweis. Nach 6.12 c) ist g streng monoton wachsend/fallend, d.h. $g(a) \neq g(b)$. Sei $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Es gilt $h(a) = f(a) = h(b)$. Die Funktion $h(x)$ ist stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$. Wir wenden 6.10 auf h an: $\exists c \in\,]a,b[$ mit $h'(c) = 0$. Weiter gilt $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$. Einsetzen von c und umformen liefert die Behauptung. $\square$

Satz 6.14. *Regeln von l'Hôpital:*

a) *Sei J ein Intervall und $c \in J$. Seien $f, g : J \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) > 0$ für alle $x \in J \setminus \{c\}$ oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in J \setminus \{c\}$. Es gelte $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

b) *Seien $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty[$ oder $g'(x) < 0$ für alle $x \in [a, \infty[$. Sei $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ oder ∞. Existiert $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, so ist auch $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

Beispiel 6.15. *a)*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + a \cdot x)}{x} &\underset{6.14}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a}{1+a \cdot x}}{1} \\ &= a \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \\ &\underset{6.14}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot -x^2 \\ &= \lim_{x \to 0} -x \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} &\underset{6.14\ b)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Die Funktion $\ln(x)$ *wächst langsamer als* x*, d.h.* $\ln(n) \in o(n)$.

7 Das bestimmte Integral

Das Ziel in diesem Kapitel ist die Bestimmung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse in einem Intevall $[a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition 7.1. *a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die* charakteristische Funktion 1_A *von A definiert durch:*

$$1_A(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, *falls es $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt, so dass f auf jedem offenen Intervall $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, n-1$ konstant ist. D.h. es gilt:*

$$f \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot 1_{]a_i, a_{i+1}[} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot 1_{\{a_i\}}}_{\text{Funktionswerte der Intervallgrenzen}}$$

Satz 7.2. *Sei $J = [a, b]$ ein Intervall.*

a) Jede Treppenfunktion auf J ist beschränkt.

b) Jeden konstante Funktion auf $[a, b]$ ist eine Treppfenfunktion.

c) Die Summe, das Produkt und der Betrag von Treppenfunktionen sind Treppenfunktionen.

Definition 7.3. *Sei $J = [a, b]$ ein Intervall und sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit*

$$f \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot 1_{]a_i, a_{i+1}[} + \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot 1_{\{a_i\}}$$

Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (a_{i+1} - a_i)$$

das Integral *von f über J. Das Integral beschreibt den „Flächeninhalt“, der jedoch auch negativ sein kann.*

Satz 7.4. *Seien f, g Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$.*

a) Linearität des Integrals*:*

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) Monotonie des Integrals*: Sei $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \quad \le \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

d) Sei $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m \cdot (b-a) \quad &\le \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \quad M \cdot (b-a) \end{aligned}$$

e) Intervalladdition*: Sei $a \le c \le b$, so gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition 7.5. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* Regelfunktion *(oder* integrierbare Funktion*), falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ Treppenfunktion } g \text{ mit } |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

Satz 7.6. *Der Satz 7.2 gilt auch für Regelfunktionen anstelle von Treppenfunktionen (jede Treppenfunktion ist Regelfunktion).*

Beweis. Wir zeigen exemplarisch, dass das Produkt zweier Regelfunktionen eine Regelfunktion ist: Seien f_1, f_2 Regelfunktionen. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle g_1, g_2 Treppenfunktionen mit

$$|f_i(x) - g_i(x)| \quad \le \quad \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

Für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$\Bigg| f_1(x) \cdot f_2(x) - \underbrace{g_1(x) \cdot g_2(x)}_{\text{Treppenfunktion}} \Bigg|$$

$$
\begin{aligned}
&= |f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot g_2(x) + f_1(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2(x)| \\
&= |f_1(x) \cdot (f_2(x) - g_2(x)) + g_2(x) \cdot (f_1(x) - g_1(x))| \\
&\leq |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - g_2(x)| + |g_2(x)| \cdot |f_1(x) - g_1(x)| \\
&\underset{(*)}{\leq} M \cdot |f_2(x) - g_2(x)| + M \cdot |f_1(x) - g_1(x)| \\
&\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$(*)$: $\exists M$ mit $|f_1(x)|, |g_2(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, da beide Funktionen beschränkt sind nach 7.2 a). □

Lemma 7.7. Gleichmäßige Stetigkeit*: Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } x, y \in [a, b] \textit{ mit } |x - y| \leq \delta$$

Beweis. Angenommen $\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall n \; \exists x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. Nach Bolzano-Weierstraß gilt: Da die Folge (x_n) beschränkt ist (durch $\max(|a|, |b|)$), besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Es gilt $(x_{n_k}) \to x \in [a, b]$, d.h. Grenzwert liegt in $[a, b]$, da $[a, b]$ abgeschlossen ist. Da $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt $(y_{n_k}) \to x$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Dies steht im Widerpsruch zur Annahme, dass $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. □

Satz 7.8. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, dann ist f eine Regelfunktion auf $[a, b]$.*

Beweis. Wir geben die Beweisidee an: Sei f stetig, sei $\varepsilon > 0$. Bestimme Treppenfunktion g mit $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Mit 7.7 gilt $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. □

Beispiel 7.9. *Sei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lemma 7.10. *a) Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$ und $(f_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f auf $[a, b]$ konvergiert, d.h. es existiert Nullfolge $(a_n)_n$ mit $|f(x) - f_n(x)| \leq a_n$ für alle $x \in [a, b]$. Dann konvergiert die Folge*

$$\left(\int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x \right)_n$$

in $\mathbb{R}$.

b) *Seien* $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ *zwei Folgen von Treppenfunktionen, die gleichmäßig auf* $[a, b]$ *gegen* f *konvergieren, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. a) Folgt aus dem Cauchy-Kriterium und 7.4.

b) Es gilt:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - g_n(x)|\,\mathrm{d}x$$

□

Definition 7.11. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Regelfunktion, wobei* $a, b \in \mathbb{R}$. *Sei* $(f_n)_n$ *eine Folge von Treppenfunktionen, die gemäß 7.10 a) gleichmäßig auf* $[a, b]$ *gegen* f *konvergiert. Das* bestimmte Integral *von* f *auf* $[a, b]$ *ist:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Beispiel 7.12. *Sei* $t \in \mathbb{R}$ *mit* $t > 0$. *Was ist* $\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x$ *? Dabei ist* $f(x) = x^2$.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i \cdot t}{n}\right)^2 \cdot 1_{\left[\frac{i\cdot t}{n}, \frac{(i+1)\cdot t}{n}\right[} + t^2 \cdot 1_{\{t\}}$$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= \left|t^2 - t^2\right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sei $0 \leq x < t$ *und* $x \in \left[\frac{i\cdot t}{n}, \frac{(i+1)\cdot t}{n}\right[$, *so gilt:*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \left(\frac{(i+1)\cdot t}{n}\right)^2 - \left(\frac{i\cdot t}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2 \cdot i \cdot t + t}{n^2} \\ &\leq \frac{2 \cdot t}{n} + \frac{t}{n^2} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Die Folge $(f_n)_n$ *von Treppenfunktionen konvergiert also gleichmäßig gegen* f. *Weiter gilt:*

$$\int_0^t f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i \cdot t}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t x^2 \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{6} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{n^3} \\
&= \frac{t^3}{6} \cdot 2 \\
&= \frac{t^3}{3}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt:

$$
\int_0^t x^m \,\mathrm{d}x = \frac{t^{m+1}}{m+1} \qquad \forall m \geq 0
$$

Satz 7.13. *Rechenregeln für Integrale: Der Satz 7.4 gilt auch für Regelfunktionen anstelle Treppenfunktionen.*

Satz 7.14. *Sei* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-c)^i$ *eine Potzenreihe mit Konvergenzradius* R *und sei* $[a,b] \subseteq \,]c-R, c+R[$*. Dann gilt:*

$$
\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-c)^i \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (x-c)^i \,\mathrm{d}x
$$

(Vertauschbarkeit von Limes und Integral)

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (x-c)^i$. Jedes f_n ist eine Regelfunktion. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x-c)^i$ ist Regelfunktion nach 7.8 und 5.14. Es existiert ein n_0 mit

$$
|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x \in [a,b] \; \forall n \geq n_0
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \right| &\underset{7.13}{\leq} \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\underset{7.13}{\leq} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\
&= \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0
\end{aligned}
$$

□

Satz 7.15. *Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige reelle Funktion. Dann existiert ein* $u \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad f(u) \cdot (b-a)$$

Beweis. Nach 5.9 existiert ein $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und ein $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Mit 7.13 gilt:

$$\begin{aligned} m \cdot (b-a) &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq M \cdot (b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq M \end{aligned}$$

Mit dem Zwischenwertsatz 5.8 a) folgt: $\exists u \in [a,b]$ mit $f(u) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Daraus folgt $f(u) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Satz 7.16. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige reelle Funktion mit* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in [a,b]$*. Sei* f *nicht die Nullfunktion. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad > \quad 0$$

8 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In 7.12 haben wir gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^3}{3} \qquad \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Im Allgemeinen erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_a^b t^2 \,\mathrm{d}t &= F(b) - F(a) \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Definition 8.1. *Sei $J = \langle a, b \rangle$ ein Intervall ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ möglich).*

a) *Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt* lokal integrierbar, *wenn f auf jedem Intervall $[u, v] \subseteq J$, für $u, v \in \mathbb{R}$, integrierbar ist, d.h. eine Regelfunktion ist.*

   Man beachte: Sei $J = [a, b]$, für $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt: lokal integrierbar = integrierbar.

b) *Eine Funktion $F : J \to \mathbb{R}$ heißt* Stammfunktion *der lokal integrierbaren Funktion f, falls*

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = F(v) - F(u) \qquad \forall u, v \in J$$

   Konvention: Ist $v < u$, so setzen wir

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Eine Stammfunktion zu f heißt auch unbestimmtes Integral *von f, bezeichnet als $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Beispiel 8.2. *Sei*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Funktion f heißt Heaviside-Funktion[1]. *Es gilt $J = \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion zu f ist*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Sei $0 \leq u < v$, dann gilt:

$$\begin{aligned} F(v) - F(u) &= v - u \\ &= \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Die Funktion F ist nicht differenzierbar in 0.

Satz 8.3. *Sei $J \neq \emptyset$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion.*

a) Sei F eine Stammfunktion von f, dann gilt:
Die Funktion G ist eine Stammfunktion von f genau dann, wenn $G(x) = F(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in J$.

b) Seien $x_0, x \in J$. Dann ist

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f

c) Jede Stammfunktion zu f ist stetig in J.

Beweis. a) „⇐“: Nach Definition.
„⇒“: Seien $x_0, x \in J$. Es gilt:

$$\begin{aligned} G(x) - G(x_0) &\underset{\text{Def.}}{=} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{Def.}}{=} F(x) - F(x_0) \\ G(x) &= F(x) + \underbrace{(G(x_0) - F(x_0))}_{=c} \end{aligned}$$

b) Setze $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$, seien $u, v \in J$. Fall 1: $x_0 \leq u < v$, so gilt:

$$F(v) - F(u) = \int_{x_0}^v f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

[1]Benannt nach dem britischen Mathematiker und Physiker Oliver Heaviside (1850 - 1925).

$$\underset{(*)}{=} \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dabei gilt $(*)$ aufgrund von 7.13:

$$\int_{x_0}^v f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$$

Die restlichen Fälle zeigt man analog dazu.

c) Folgt aus der Beschränktheit von Regelfunktionen, siehe 7.13.

□

Definition 8.4. *Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt* stetig differenzierbar*, falls f differenzierbar und f' stetig ist.*

Theorem 8.5. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei J ein beliebiges Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.*

a) Ist f stetig (also insbesondere lokal integrierbar), dann ist jede Stammfunktion F von f differenzierbar und es gilt $F' = f$ bzw. $(\int f(t)\,\mathrm{d}t)' = f$.

b) Ist f stetig differenzierbar, dann ist f eine Stammfunktion zu f', d.h.

$$\begin{aligned} \int f'(t)\,\mathrm{d}t &= f + c \\ \int_u^v f'(t)\,\mathrm{d}t &= f(v) - f(u) \qquad \forall u, v \in J \end{aligned}$$

Beweis. a) Sei F eine Stammfunktion von f. Sei $c \in J$. Ist $x \neq c$, $x \in J$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\theta(x)$ zwischen x und c mit

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} &\underset{\text{Def. Stammfunktion}}{=} \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-c} \cdot (x - c) \cdot f(\theta(x)) \\ &= f(\theta(x)) \\ F'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} f(\theta(x)) \\ &\underset{f \text{ stetig}}{=} f(c) \end{aligned}$$

b) Sei F eine Stammfunktion zu f'. Da f' stetig ist, folgt mit 8.5 a) $F' = f'$. Es gilt $(F - f)' = F' - f' = 0$ auf J. Mit 6.12 a) gilt $F - f = c$ konstant. Daraus folgt $f = F - c$ ist eine Stammfunktion zu f'.

□

Beispiel 8.6. *a) Es gilt:*

$$\int a \cdot x^n \,\mathrm{d}x \quad = \quad a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Nach 8.5 b) gilt $\left(a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = a \cdot x^n$.

b) Sei $n \leq -2$. *Es gilt:*

$$\int a \cdot x^n \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

d.h. für $n \geq 2$ *gilt* $\int \frac{a}{x^n} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{-n+1} \cdot \frac{1}{x^{-n+1}} + c$.

Satz 8.7. *Sei* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$ *eine Potenzreihe um Entwicklungspunkt* a *mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Sei* $J =]a-R, a+R[$.

a) Die Funktion f *ist differenzierbar und es ist* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}$. *(Gleichweise Differentation)*

b) Es gilt:

$$\int f(t) \,\mathrm{d}t \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1} + c$$

Beweis. a) Wir betrachten $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1}$. Nach 3.34 ergibt sich der Konvergenzradius aus dem Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|a_k|}$ und $\sqrt[k]{k \cdot |a_k|} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|a_k|}$. Mit 8.8 haben beide Reihen den gleichen Konvergenzradius. Sei $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-a)^k$, $x_0 \in J$, $x \in J$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\underset{8.5\text{ b)}}{=} f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} \\
f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{7.14}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}_{=:\, H(x) \text{ stetig auf } J \text{ nach } 5.14} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Nach 8.5 a) gilt:

$$f'(x) \quad = \quad \left(\int H(x)\,\mathrm{d}x\right)'$$

$$\begin{aligned} &= H(x) \\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} \end{aligned}$$

b) Analog.

□

Lemma 8.8. *Es gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

Beweis. Wir definieren $\sqrt[k]{k} - 1 =: b_k \geq 0$, dann ist $\sqrt[k]{k} = b_k + 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} k &= (b_k+1)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot b_k^j \\ &\underset{\text{für } k \geq 2}{\geq} 1 + k \cdot b_k + \binom{k}{2} \cdot b_k^2 \\ &\geq \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot b_k^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad b_k^2 \leq \frac{2}{k-1} \quad \Rightarrow \quad b_k \leq \sqrt{\frac{2}{k-1}} \to 0 \quad \Rightarrow \quad b_k \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{k} \to 1.$ □

Beispiel 8.9. *a)*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \exp(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \left(\frac{x^k}{k!}\right)' &= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ (\mathrm{e}^x)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^x \\ \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + c \end{aligned}$$

b) Für $x > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (\ln(x))' &= \ln'(\mathrm{e}^n) \qquad \textit{für } x = \mathrm{e}^n \\ &\underset{6.6}{=} \frac{1}{\mathrm{e}^n} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

c) Es gilt $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + c$, da

$$\begin{aligned} (x \cdot \ln(x) - x)' &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

d) Mit 8.8 und der Potenzreihendarstellung von $\sin$ und $\cos$ folgt:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \\ \int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + c \\ \int \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x) + c \end{aligned}$$

e) Sei $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Die Funktion f ist differenzierbar für $x \neq 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= 2 \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Prüfen, ob f in 0 differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{4.6\,f)}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f ist differenzierbar, aber f' ist nicht stetig in 0, da $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Literaturverzeichnis

[Hau07] Peter Hauck. Mathematik 1 für Informatiker und Bioinformatiker. 2006,2007. Vorlesungsskript.

[WHK04] Manfred Wolff, Peter Hauck, and Wolfgang Küchlin. *Mathematik für Informatik und BioInformatik*. Springer-Verlag, 2004.

Index